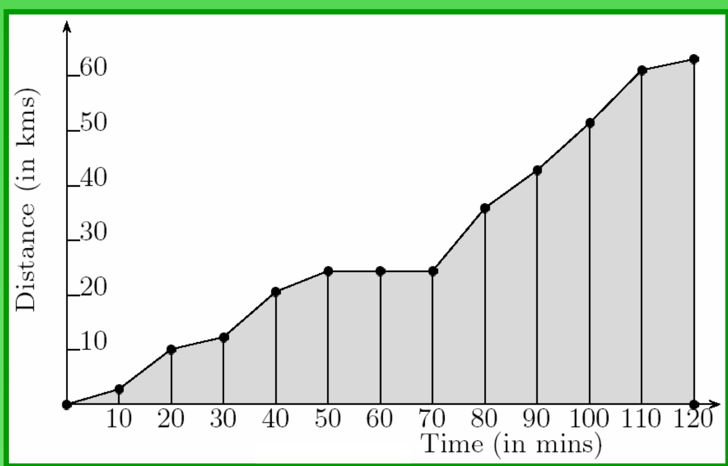
Libros Básicos de Ciencia

Libro 3

Relaciones, cambio y análisis matemático



Roy McWeeny

LIBROS BÁSICOS DE CIENCIA

Una colección que comienza *desde lo más elemental*

Libro 3. Relaciones, cambio y análisis matemático

Roy McWeeny
Profesor Emérito de Química Teórica, Universidad de Pisa, Pisa (Italia)

Traducido del original en inglés por Ángel S. Sanz Ortiz
Instituto de Física Fundamental "Blas Cabrera", CSIC, Madrid (España)

Todos los libros de la colección son de *distribución totalmente gratuita* y estan disponibles en la red, visitando los sitios *web*:

www.paricenter.com (en 'Basic Books in Science')

www.learndev.org (en 'For the Love of Science')

MANUALES DE CIENCIA

Sobre esta colección

Todo progreso humano depende de la **educación**, y para conseguirlo necesitamos libros y centros de enseñanza. La Educación Científica es una de las grandes piezas clave del progreso.

Desgraciadamente, no siempre es sencillo disponer de libros y centros de enseñanza. No obstante, con ayuda de la tecnología moderna, hoy en día todo el conocimiento acumulado a nivel mundial está al alcance de cualquiera a través de los enormes bancos de datos disponibles en la Red (la 'red'que conecta los ordenadores de todo el mundo).

La colección "Manuales de Ciencia" está orientada a explotar esta nueva tecnología, poniendo al alcance de cualquier persona el conocimiento básico en todas las áreas de la ciencia. Cada manual cubre, con cierto grado de profundización, un área bien definida, partiendo de los conocimientos más básicos y alcanzando un nivel de acceso a la Universidad, y se encuentra a disposición totalmente gratuita en la Red, *sin coste alguno para el lector*. Para obtener una copia debería ser suficiente con hacer una visita a cualquier biblioteca o lugar público donde haya un ordenador personal y una línea telefónica. Cada manual servirá, así, como uno de los "bloques" sobre los que se construye la Ciencia, y todos juntos constituirán una biblioteca científica 'de ganga'.

Sobre este libro

Este manual, al igual que los otros de la colección, está escrito en un inglés sencillo[1], el lenguaje más utilizado en ciencia y tecnología. Este Manual, cimentado en los Manuales 1 (Números y símbolos) y 2 (El espacio), se ocupa de las matemáticas que necesitamos para describir las *relaciones* entre las magnitudes que medimos en física y en las ciencias físicas, en general. Esto nos lleva al estudio de las relaciones y el cambio, el punto de partida del análisis matemático y el cálculo infinitesimal, necesario en todas las ramas de la ciencia.

[1] El manual que tienes delante es una traducción al español del original, en inglés.

Un vistazo previo

En los primeros dos manuales de la colección se introdujo el 'lenguaje'de las matemáticas, es decir, cómo *describir* el mundo a nuestro alrededor mediante símbolos (trazos sobre un papel) que representan las magnitudes que medimos, como la distancia y el tiempo. Además, en el Manual 2, utilizábamos el concepto de distancia para construir las principales ideas de la geometría euclídea. Sin embargo, no llegamos a estudiar la manera en la que se pueden *relacionar* magnitudes diferentes (es decir, cómo una magnitud y, por ejemplo, puede *depender de* otra x).

Una gran parte de las matemáticas tiene que ver con las **relaciones** y la descripción de tales relaciones en términos de símbolos y ecuaciones. Este campo de estudio se denomina **análisis matemático**. En este Manual vamos a aprender sobre este campo así como todo lo que puede hacerse con él.

- El capítulo 1 muestra tres formas de describir una relación entre magnitudes. Se puede (1) construir *tablas*, mostrando pares de valores relacionados; (2) 'dibujar'dichos valores en una *gráfica* que nos da una 'representación visual'de la relación; o (3) (si tenemos suerte) encontrar una **función algebraica** con la que obtener los mismos valores relacionados. En cualquiera de los tres casos, diremos "y es función de x" y escribiremos "$y = f(x)$". En este capítulo hay muchos ejemplos de funciones simples, sobre cómo e denominan y qué pinta tienen.

- El **cálculo infinitesimal** se encuentra en el corazón del análisis matemático. Los tres capítulos siguientes introducen las ideas esenciales de las dos ramas principales del cálculo infinitesimal: la **diferenciación** de una función dada y su **integración**. Ello se hará utilizando un ejemplo muy sencillo: la distancia s recorrida por un cuerpo que cae como función del tiempo t a partir del instante en el que se suelta: $s = f(t)$.

- El capítulo 5 nos llevará a la *representación* de cualquier función $y = f(x)$ como una **serie de potencias** $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.

- Finalmente, en el capítulo 6, echaremos un vistazo rápido a lo que se puede hacer con todas estas 'herramientas': (1) extenderlas a **funciones de más de una variable**, (2) resolver **ecuaciones diferenciales** importantes en matemáticas, y (3) usar estas soluciones para representar una función dada de otra manera (como una **expansión de autofunciones**), algo fundamental en física matemática.

CONTENIDO

Notas para el lector

Cuando los capítulos tienen varias secciones, éstas se enumeran de manera que, por ejemplo, "sección 2.3" significa "sección 3 del capítulo 2". Igualmente, "ecuación (2.3)" significa "ecuación 3 del capítulo 2".

Las palabras 'claveímportantes aparecen impresas en letra **negrilla** cuando se utilizan por primera vez. Además, estos términos se han recopilado en el índice al final del libro.

Capítulo 1

Relaciones entre magnitudes

1.1. Tablas, gráficas y funciones

Cuando hablábamos de *medir* una magnitud física al comienzo del Manual 1, nos referíamos únicamente a la distancia (medida con una regla), el tiempo (medido con un reloj) y la masa (medida con una balanza). La masa, la longitud y el tiempo (M, L, T) son tres de las magnitudes 'primarias'que nos encontramos en ciencia. Además, en el Manual 2, descubrimos lo lejos que se puede llegar simplemente haciendo consideraciones sobre dos de ellas (L y T). Así, comencemos desde aquí. ¿Qué pueden representar L y T? ¿Qué queremos decir cuando hablamos de una **relación** entre ambas magnitudes?

Supongamos que s es la distancia recorrida por un objeto que se mueve (como una bicicleta, un camión o una piedra cayendo). Tiene dimensiones [s] = L y es la longitud del camino, desde el punto de partida (en el instante $t = t_0$) hasta el punto final (en el instante $t = t_f$, donde f quiere decir 'final'). Utilizaremos s y t para representar la distancia recorrida (s) y el tiempo transcurrido para recorrer esa distancia (t). Las magnitudes s y t son **variables**, mientras que s_0 y t_0 son *valores particulares* de las variables al comienzo del movimiento y s_f y t_f son los valores al final del recorrido (valores finales). En el Manual 2 casi siempre medíamos las distancias a lo largo de un línea recta (un 'eje') y utilizábamos x, por ejemplo, para denotar una distancia medida a lo largo del eje x. Sin embargo, ahora estamos hablando de *cualquier* tipo de camino, el cual podría ser 'serpenteante', por lo que emplearemos la variable s.

Cuando hablamos de *relación* entre las variables s y t, simplemente nos estamos refiriendo a que la distancia tiene un cierto valor (s) en el instante (t) en el que realizamos la medida. En este caso, s *depende del* tiempo t, lo cual expresamos diciendo que s es la variable *dependiente* que corresponde a la variable *independiente* t. Por ejemplo, el conductor de un camión (que puede estar llevando arena a un lugar de construcción) tendrá enfrente de él un reloj y un 'cuenta-kilómetros'que muestra los kilómetros que ha recorrido (es decir, el valor de s que corresponde a un tiempo t). La relación entre ambas magnitudes se puede describir asignando una lista de pares de números —(s_0, t_0) al comienzo del viaje, (s_1, t_1) al transcurrir 10 minutos, (s_2, t_2) tras otros 10 minutos, y así sucesivamente. Los valores correspondientes pueden escribirse en una 'tabla', como la siguiente:

t	t_0	t_1	t_2	t_3	...	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}
s	s_0	s_1	s_2	s_3	...	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}

donde aparecerán los tiempos (en 'unidades'de 10 minutos) y las distancias respectivas (en km). Si de vez en cuando los pares de valores son registrados de forma automática, el conductor del camión obtendrá una lista al final de su recorrido. Supongamos que obtiene una tabla con esos valores, similar a la siguiente

t	0.0	10	20	30	40	50	60
s	0.0	2.8	10.1	12.3	20.6	29.4	29.4
t	70	80	90	100	110	120	
s	29.4	35.9	42.8	51.9	61.1	63.1	

Ésta representará de un modo bastante preciso cómo a sido su viaje —una forma *tabulada* de mostrar la relación entre la distancia y el tiempo. Sin embargo, si va con ella al jefe, no estará demasiado claro qué es lo que ha estado haciendo con su tiempo.

Otra manera de mostrar la misma relación, mucho más *gráfica* y fácil de entender, es hacer una 'representación'como la que se muestra en la Fig. 1:

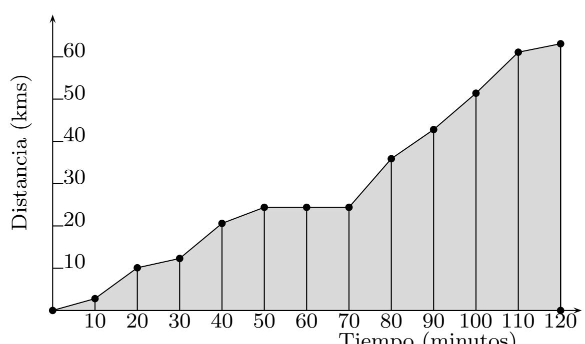


Figura 1

Para realizar la Fig. 1, se toman los pares de valores de t y s como las coordenadas x e y de un punto (ver sección 2.2 del Manual 2) de la representación y después se unen todos los puntos mediante trazos cortos. De este modo, obtenemos una **gráfica**, una 'representación'de la relación existente entre dos magnitudes variables (t y s).

Obviamente no sabemos lo que sucede *entre* un punto y el siguiente, ya que los únicos valores de s que tenemos son para valores de t de 10 en 10 minutos —y, claro, en 10 minutos pueden suceder muchas cosas (podría haber una avería y los valores de s no variarían hasta que se arreglase). Si dibujamos una *línea suave* que pase por todos los puntos, esto significa que estamos suponiendo que no hay cambios súbitos durante cualquier intervalo de 10 minutos (es decir, que las cosas continúan de la misma forma más o menos minuto a minuto). En cualquier caso, la Fig. 1 da solamente una idea *aproximada* del viaje, con la ventaja de que es más fácil de seguir que una gran tabla de números y, además, podemos entender más fácilmente su significado. Por ejemplo, el camión no irá muy lejos durante los primeros 10 minutos (menos de 3 Km, mientras que una buena velocidad para un camión estaría en torno a unos 8 Km cada 10 minutos); hay que tener en cuenta que el conductor tendría que entrar en la carretera, llenar el depósito de la gasolina, etc. Durante los próximos 10 minutos, el resultado es mejor, haciendo 7,3 Km. Sin embargo, en el siguiente intervalo, el conductor sólo avanzó 1,6 Km. ¿Por qué? De hecho, el conductor tendría que pararse en una cantera para cargar arena y grava que luego llevaría al lugar de construcción; así, prácticamente durante los 10 minutos el camión no se movería en absoluto. Tras eso, el conductor se dirigió a una carretera buena e intentó recuperar el tiempo perdido. En los próximos 10 minutos hizo 8.3 Km y después 8.8 Km (una buena marca para un viejo camión). Sin embargo, el conductor no pudo continuar así: había estado conduciendo durante casi una hora y, además, cargando el camión, por lo que estaba cansado y con sed. Si te fijas en la gráfica, verás que la distancia s no cambió durante los siguientes 20 minutos: el conductor paró para beber y charlar con otros conductores (y el tiempo pasa mucho más rápido de lo que no se imagina).

En la primera mitad de la segunda hora, el conductor progresó bastante bien, excepto por el hecho de que no hizo más de 7 Km en cualquier intervalo de 10 minutos. Sin embargo, recorrió más de 9 Km en cada uno de los siguientes dos intervalos. ¿Por qué sucedió esto? La carretera era colina arriba durante los primeros 14 Km. Una vez que llegó a lo más alto, fue colina abajo durante el resto del camino, cogiendo así velocidad y haciendo 18 Km en los siguientes 20 minutos. Después, llegó a la ciudad, donde había tráfico, bicicletas y gente cruzando la carretera, por lo que tenía que ir más despacio. Así que recorrer los siguientes 2 Km le llevaron 10 minutos.

Ahora ya puedes comprender por qué la descripción gráfica de la relación entre s y t es tan útil: con una simple mirada a la gráfica uno obtiene una buena idea de lo que está sucediendo —e incluso el por qué— sin necesidad de realizar ningún tipo de cálculo. El uso generalizado de gráficas se da tanto en matemáticas como en física, y también en la mayoría de las ciencias.

Hay una tercera forma, no obstante, de describir la relación entre dos magnitudes x e y. Algunas veces se puede encontrar una *regla* matemática, una **fórmula**, para obtener el valor de y dado el valor de x. Como ejemplo, supongamos que dejas caer una pequeña piedra desde el tejado de un edificio muy alto. La distancia que cae en un tiempo t (a partir de ahora la denotaremos con s, que no hay que confundir con la abreviatura 's'con que denotamos el 'segundo') depende de t según la regla

$$s = ct^2, \tag{1.1}$$

donde c es una constante con un valor aproximado $c = 5\ \mathrm{ms}^{-2}$. ¿Por qué lo escribimos de esta forma tan extraña en vez de decir, simplemente, $c = 5$? Ello se debe a que las magnitudes físicas, las cosas que medimos, *no* son 'simples números'—son números de *unidades*. Aquí, m es la unidad de longitud (L) —el metro—, mientras que s es la unidad de tiempo (T) —el 'segundo'. Decimos, así, que c "tiene dimensiones" LT^{-2}. Por tanto, si utilizamos la fórmula (1.1) para determinar cuán abajo cae la piedra en dos segundos, debemos poner $t = 2$ s; la respuesta será

$$\begin{aligned} s &= c \times t \times t = 5\ \mathrm{ms}^{-2} \times 2\mathrm{s} \times 2\mathrm{s} \\ &= (5 \times 2 \times 2)(\mathrm{ms}^{-2}\mathrm{s}^2) = 20\ \mathrm{m}. \end{aligned}$$

La única aritmética que necesitamos realizar es multiplicar los números; las unidades 'cuidan de sí mismas'y el resultado correcto que se obtiene es 20 metros. En general, una magnitud con dimensiones LT^{-2} nos dará otra con dimensiones de longitud (L) cuando la multipliquemos por dos factores tiempo (T^2). Anteriormente se dijo (ver sección 2.1 del libro 2) que si conocemos las dimensiones de una magnitud, es fácil cambiar nuestras unidades de medida; si tomamos una nueva unidad que sea k veces mayor que la unidad anterior, la medida numérica de la magnitud será k veces *más pequeña*. Así, pues, si decidimos utilizar el 'pieén vez del metro como nuestra unidad de longitud (1 pie = 12 pulgadas = $12 \times 2{,}54$ cm = 30.48 cm $\approx 0{,}30$ m), tendremos 20 m = 20/0.30 pies $\approx$ 66,67 pies. Por otra parte, la magnitud c, con un factor L en su fórmula dimensional, pasará a ser $c = 5/0{,}30$ pies s^{-2} = 16.67 pies s^{-2}.

La tercera forma de describir una relación entre dos magnitudes, empleando una fórmula como (1.1), es a la que nos referiremos en la mayor parte de este libro. Siempre que sea posible encontrar una fórmula, podemos utilizar los métodos del *análisis matemático*, incluso cuando la fórmula sea mucho más complicada que (1.1) y queramos realizar preguntas difíciles sobre la relación y su significado. Sin embargo, antes de ir a los detalles, hemos de observar que *cualquier* relación entre dos magnitudes —una variable independiente x y una variable dependiente y— puede ser expresada de forma abreviada como

$$y = f(x), \tag{1.2}$$

que se lee "y es función de x". Esto significa que, para cada valor que podamos asignar a x, existirá un valor y relacionado —la variable que depende de x. No *necesitamos* tener una bonita fórmula sencilla, tal como (1.1); si no la tenemos, debemos conseguir los valores relacionados a partir de una lista que nos haya sido dada o leerlos en una gráfica —que es una manera más "gráfica" de representar los valores medidos. El 'símbolo de la función'f simplemente significa que si nos dicen x, tendremos la manera de conseguir el valor y relacionado.

Por supuesto, una variable dependiente puede depender de varias magnitudes variables. Por ejemplo, si escalamos una colina, podemos desplazarnos una distancia x hacia el este y, después, una distancia y hacia el norte, alcanzando la altura z sobre el nivel a partir del cual empezamos. En tal caso, escribiríamos

$$z = f(x, y). \tag{1.3}$$

Esta ecuación describirá la superficie de la colina, pues si comenzamos a partir de un punto con coordenadas (X, Y) y caminamos sólo en la dirección este-oeste, manteniendo constante el valor de y ($y = Y$), la altura vendrá dada por $z = f(x, Y)$ —una función de una única variable x. Si, por el contrario, caminamos sólo en la dirección norte-sur, manteniendo x constante ($x = X$), el camino vendrá descrito por la función $z = f(X, y)$ —siendo y la única variable independiente.

Antes de ir más lejos, no obstante, continuaremos hablando de funciones de una única variable, no permitiendo que x e y varíen al mismo tiempo. Denotaremos la variable dependiente como y, como siempre, en vez de z.

1.2. Algunas funciones simples

A menudo, la relación entre dos magnitudes puede representarse mediante una fórmula simple, tal como (1.1). Éste es un caso especial de

$$y = f(x) = cx^n, \tag{1.4}$$

en el que las variables independiente y dependiente se han denotado con x e y, respectivamente, y a n se le ha asignado el valor $n = 2$. Podemos *representar* la relación dibujando una gráfica, como en la Sec. 1.1. Al hecho de marcar los puntos (x, y) para los valores correspondientes de x e y, y unirlos mediante una curva suave, se le denomina "graficar la curva".

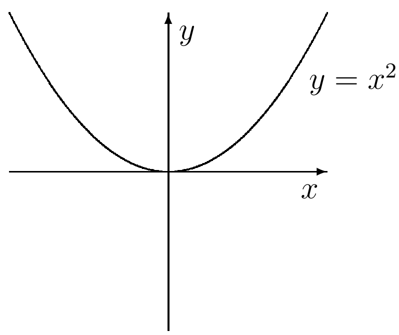


Figura 2

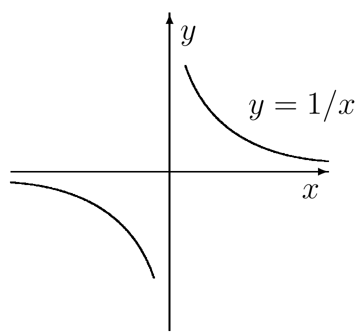


Figura 3

El resultado se muestra en la Fig. 2. Esta curva se denomina **parábola**; parte de $y = 0$ a $x = 0$ y se eleva suavemente a valores cada vez más grandes, sin límite, a medida que x crece. Decimos que "y tiende a infinito cuando x tiende a infinito" o, simbólicamente, $y \to \infty$ cuando $x \to \infty$. Cuando la variable independiente es un tiempo, $x = t$, como en (1.1), la 'rama'correspondiente a los valores *positivos* de t es la rama derecha de la parábola. La otra mitad, la izquierda, corresponde a valores *negativos* de x, siendo la curva total *simétrica* con respecto al eje y, ya que el valor $y = x^2$ no cambia si usamos $-x$ en vez de x. En este caso también decimos que la función describe una función *par* de x, ya que depende sólo de una potencia par ($n = 2$) de la variable independiente.

Si tomamos el valor $n = -1$, obtendremos la curva de la Fig. 3. La función $y = cx^{-1} = c/x$ describe una *hipérbola*; a medida que x se hace mayor, y hace lo contrario. Simbólicamente, $y \to 0$ cuando $x \to \infty$. Sin embargo, cuando $x \to 0$, sucede algo muy especial: $y \to \infty$, pero de tal manera que la curva se hace cada vez más cercana al eje vertical $x = 0$ (es decir, el eje y). La hipérbola tiene una **asíntota** en $x = 0$. Al ir hacia valores negativos de x, vemos que hay una **singularidad** (un punto muy especial) en $x = 0$. Ahí, la curva se parte en dos ramas separadas, siendo la parte para x negativa (pero con $|x| > 0$) como la rama positiva, pero reflejada sobre los ejes. Tanto la rama positiva como la negativa tienen también asíntotas horizontales, donde se acercan cada vez más al eje x. La curva completa representa una función **impar** de x, que procede de una potencia impar ($n = -1$) de la variable independiente.

Las funciones representadas en las Figs. 2 y 3 introducen otras dos ideas importantes. Lejos de un punto singular que pueda existir, ambas funciones son *continuas*. Independientemente de cuán cerca estén dos valores de x, los correspondientes valores de y también se acercarán indefinidamente —en las curvas continuas no hay 'roturasñi 'saltos'. Además, ambas funciones son *univaluadas*, que quiere decir que si conocemos el valor de x, la función sólo aporta *un* valor para la variable dependiente y. En Ciencia, la mayor parte del tiempo hablamos de funciones continuas y univaluadas. Sin embargo, es importante tener en cuenta que pueden encontrarse definidas únicamente para un cierto rango de valore de la variable independiente. Si esos valores caen entre $x = a$ y $x = b$, decimos que $f(x)$ es continua y univaluada "en el intervalo (a, b)".

En el libro 1, encontrábamos un número relativamente grande de funciones que también aparecen una y otra vez en todas las partes de la Ciencia. Necesitamos saber cómo denominarlas.

1.3. El nombre de las funciones

Hay dos clases principales de funciones. Aquellas descritas mediante una regla (una fórmula o ecuación), que involucran sólo un número *finito* de 'operacionesélementales, tales como sumar y multiplicar (lo que incluye elevar a una potencia, x^n, donde n es un número entero), se denominan **funciones algebraicas**. Todas las demás relaciones funcionales, aquellas que *no* son algebraicas, son **funciones transcendentales** —van 'más alláó están 'sobre'las formas algebraicas.

Un ejemplo del primer tipo es la relación que resulta de la ecuación $x^2 + 3xy + y^3 = 0$. Ésta determina un valor de y para cualquier valor dado de x, incluso a pesar de que no posea una expresión sencilla para $y = f(x)$, con y a un lado del signo =, pero no en el otro. Decimos que da "y como una **función implícita** de x", mientras que $y = f(x)$ da y como una **función explícita** de x cuando puede encontrarse la fórmula correspondiente.

El segundo tipo de relación (transcendental) incluye todas aquellas que implican un número *infinito* de operaciones elementales, procediendo normalmente de alguna clase de proceso *límite* (ver el capítulo 4 del libro 1) en el que nos *acercamos* al valor de y cada vez más a medida que tomamos más términos dependientes de x. En los libros 1 y 2 ya nos vimos funciones como e^x, $\sin x$ o $\cos x$, que son de este tipo. Además de aquéllas en forma *explícita*, también podemos encontrarnos funciones transcendentales de forma *implícita*, en las que la ecuación que define la relación contiene una mezcla de términos dependientes de x e y.

Debido a que las funciones definidas implícitamente son menos comunes que las otras y, además, son más difíciles de trabajar con nuestros conocimientos actuales, a partir de ahora hablaremos prácticamente todo el tiempo de funciones algebraicas explícitas. Sólo en alguna ocasión consideraremos funciones transcendentales explícitas.

¿Qué tipo de función algebraica cabe esperar? El siguiente ejemplo puede ayudar. Las relaciones

$$\text{(i) } x^2 + 3xy - 4y = 0, \quad \text{and} \quad \text{(ii) } x^4 + 2x^2y^2 - 3y^2 = 0,$$

son algebraicas, pero implícitas. Ambas ecuaciones, sin embargo, pueden resolverse para dar las formas explícitas

$$\text{(i) } y = \frac{x^2}{4 - 3x}, \qquad \text{(ii) } y = \frac{x^2}{\sqrt{3 - 2x^2}}.$$

La primera expresa y en términos de x utilizando sólo un número finito de operaciones elementales (sumas, multiplicaciones y sus inversas —la resta y la división, respectivamente), y se denomina **función algebraica racional**. Tales funciones pueden expresarse siempre de la forma $y = f(x)/F(x)$, donde $f(x)$ y $F(x)$ son **polinomiales** de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, que es una función *entera* racional. El segundo resultado, (ii), *no* es una forma *entera* racional, porque involucra la operación de tomar la raíz cuadrada — que es una potencia *fraccionaria*. (Es posible imaginar funciones algebraicas que no se ajustan a ninguno de estos dos tipos, pero las utilizaremos.)

Con respecto a las funciones transcendentales, la más importante con la que nos hemos encontrado ya es la **función exponencial**. Se define mediante una **serie** (ver sección 5.1 del libro 1) y se suele denotar mediante $y = f(x) = \exp(x)$, donde

$$y = \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{1.5}$$

es la suma de un número *infinito* de términos, cada uno de la forma $x^n/n!$ ($n!$, el 'factorial de n', es el producto de los primeros n enteros).

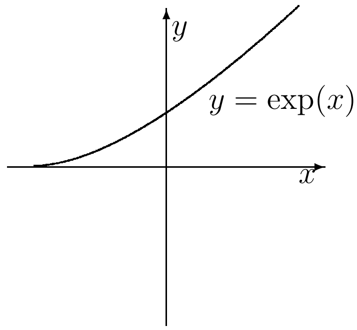


Figura 4

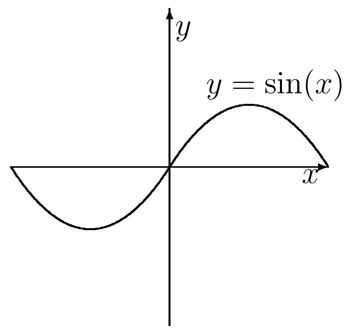


Figura 5

El comportamiento de esta función, también denotada mediante $y = e^x$, se muestra en la Fig. 4. Su valor crece suavemente a medida que x va desde $-\infty$ a ∞. La curva corta al eje y en el punto donde $x = 0$ e $y = 1$.

Los otros dos ejemplos importantes son las funciones 'seno'y 'coseno'(ver capítulo 4 del libro 1), definidos mediante las series

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots. \tag{1.6}$$

Estas series relacionan el seno y el coseno de un ángulo x, definido geométricamente (ver sección 3.2 del libro 2), al propio ángulo cuando éste se expresa en *radianes*. Ambas funciones están **acotadas**, ya que y tiene una cota superior $+1$ y una cota inferior -1. Además, son **periódicas**, ya que se repite el mismo ciclo de valores una y otra vez a medida que x crece en 2π radiantes (360 grados sexagesimales). El seno de x se muestra en la Fig. 5; el coseno es exactamente igual, sólo que la curva está desplazada π radianes a lo largo del eje x.

1.4. Las funciones inversas

La función $y = f(x)$, una vez escrita como una fórmula, nos da el valor de y asociado a cualquier valor de x que elijamos. Sin embargo, ¿qué sucede si preguntamos "cuál es el valor de x que, puesto en la fórmula, nos da un determinado valor de y"? En este caso, la y es la "variable independiente" (la que nosotros elegimos) en vez de x, y puede suceder que no tengamos una fórmula que nos de una respuesta.

Si utilizamos una gráfica para expresar y en términos de x, no hay ningún problema, ya que cualquier punto de la curva nos dirá tanto (i) el valor de y asociado con un valor dado de x, como (ii) el valor de x asociado a un determinado y. Sin embargo, dado que habíamos acordado que la variable independiente se representa a lo largo del eje horizontal y la dependiente a lo largo del vertical, necesitaremos intercambiar los ejes. La función $y = x^2$ mostrada en la Fig. 2 pasará a ser como en la Fig. 6, donde los valores de y se han representado horizontalmente y los de x verticalmente.

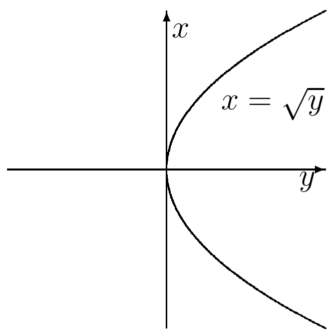


Figure 6

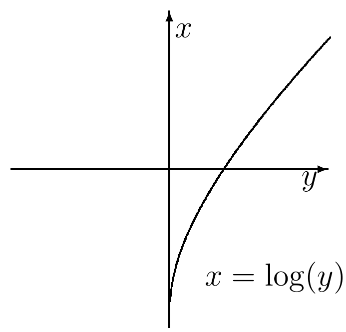


Figure 7

La nueva función, que da x en términos de y, puede escribirse como $x = g(y)$ para mostrar que es diferente de la que nos da el cuadrado de la variable. En el caso que estamos tratando, ya conocemos la regla que hay que aplicar para determinar x a partir de un cierto valor de y. Las dos fórmulas que necesitamos son

$$y = f(x) = x^2 \qquad x = g(y) = \sqrt{y}, \tag{1.7}$$

donde la segunda es justamente la definición de lo que denominamos "raíz cuadrada" de y, es decir, el número cuadrado que nos da x en la primera fórmula (ver sección 4.2 en el libro 1). Observemos, no obstante, que la función inversa puede tener propiedades muy diferentes con respecto a la de partida: un valor de $y = x^2$ procede de los *dos* valores diferentes de la variable independiente x y $-x$. Por tanto, $x = \pm\sqrt{y}$ es una función bi-valuada de y (donde la raíz, en sí, se toma como positiva).

La función $g(y) = \sqrt{y}$ también puede escribirse como $g(x) = \sqrt{x}$, ya que no importa el nombre que le demos a la variable. A menudo se denomina simplemente como el **argumento** de la función. En este caso, $g(x)$ es la (función) **inversa** de la función $f(x) = x^2$. De igual manera, cuando $y = f(x) = x^n$, la función inversa $g(x)$ se denomina "raíz n-ésima" de x y se escribe $g(x) = \sqrt[n]{x}$. En la mayoría de la casa, sin embargo, la fórmula de la función inversa no se conoce o puede ser difícil hallarla. Por ejemplo, la función inversa asociada a la función exponencial, cuya gráfica se muestra en la Fig. 4, se denomina **logaritmo** y se define tal que

$$\text{cuando} \quad y = f(x) = \exp x, \quad \text{entonces} \quad x = g(y) = \log y. \tag{1.8}$$

En este caso, aunque es muy sencillo intercambiar los ejes en la Fig. 4 para obtener la función que se muestra en la Fig. 7, es bastante complicado encontrar una *regla matemática* para obtener la función inversa asociada a la función definida mediante la serie (1.5). Esto significaría encontrar una fórmula para x, a la derecha de la ecuación (1.5), en términos de y, a la izquierda.

Obsérvese que con las funciones *con nombre*, como $\exp(x)$, $\sin(x)$, etc., solemos dejar fuera de los 'paréntesis'la variable x. Por ejemplo, en vez de $\exp(x)$, escribimos simplemente $\exp x$. A partir de ahora, haremos esto. Los paréntesis son útiles cuando el argumento en sí de la función es una expresión grande [por ejemplo, $(3x^2 + 5)$ en vez de x].

Muchas funciones y sus inversas proceden de nuestros intentos de resolver problemas que nos encontramos en Ciencia. Por ejemplo, si la variable y (que denominaremos N) mide el número de parejas macho/hembra en una población de moscas tras n generaciones, la ley de **crecimiento exponencial** posee la forma general

$$N = N_0 \exp(cn), \tag{1.9}$$

donde N_0 es el número de parejas al comienzo del recuento y c es una constante que es mayor cuanto más rápidamente se reproduzcan. El número n es una medida del tiempo (el número que indica la 'vida media', que pueden ser días en el caso de las moscas). La Fig. 4 muestra cuán rápido crece la población (valores positivos del argumento cn). En el caso de parejas humanas, por ejemplo, la población mundial es ahora diez mil veces mayor que la que había hace mil años. Por supuesto, (1.9) describe el crecimiento solamente en el caso de que no haya restricciones; en este 'modelo'simple no se tienen en cuenta los casos de muertes y enfermedades. Si cambiamos el signo de la constante c en (1.9), la población N_0 se *irá reduciendo* en cada generación. La rama negativa de la curva representará entonces la ley de **decaimiento exponencial**. En cualquier población real, el crecimiento o decaimiento dependerá de muchos factores. Una de las cuestiones más importantes para la Humanidad es, precisamente, cómo asegurar que la población mundial es *sostenible* —sin depender de enfermedades y muertes, hambre o guerras, que produzcan un retroceso.

Ejercicios

(1) Dibujar la curva $y = x^2$ para valores de x entre -5 y $+5$. Haz lo mismo para $y = x^2 + 2$ y $y = 2x^2 + 2$. Si, en vez de ello, consideras la función $y = px^2 + q$, donde p y q son números a los que puedes asignar cualquier valor (valores 'arbitrarios'), obtendrás una curva similar a la de la Fig. 2. Intenta describir cómo variará.

(2) Dibujar la curva $y = 1/x$ para x entre -1 y $+1$ en intervalos de 0,1. ¿Qué sucede cuando x está muy cercano a cero? ¿Hay alguna singularidad? Si es así, ¿para qué valores de x? Hacer lo mismo para la función $y = 1/(x+\frac{1}{2})$.

(3) ¿Qué nombre asignarías a la función $y = x^2/(4-3x)$? Dando unos pocos valores a x y obteniendo los correspondientes valores de y, trazar 'grosso modoésta función para mostrar la forma de la curva. ¿Qué sucede (i) cuando x se hace grande y (ii) cuando adquiere valores entre 1,3 y 1,4? ¿Hay alguna asíntota? Si es así, muéstralas en tu gráfica.

(4) Inspecciona ahora la función $y = x^2/\sqrt{3-2x^2}$ y represéntala para mostrar que cómo se comporta dentro del rango comprendido entre $x = 0$ y $x = \sqrt{3/2}$. ¿Qué sucede en el límite superior?

(5) Calcular los valores $y = \exp x$ para los valores $x_1 = 0{,}01$ y $x_2 = 0{,}02$ a partir de la serie (1.5) y utilizando únicamente los cuatro primeros términos. Verifica que los valores de y correspondientes están relacionados mediante $y_1 \times y_2 \approx y_3$, donde $y_3 = \exp(x_1 + x_2)$.

(6) Cuando $y = \exp x = e^x$, se dice que x es el "*logaritmo* de y en base e". ¿Cómo pueden describirse los resultados del ejercicio anterior en términos de logaritmos?

(7) Intenta calcular el valor de la fracción $y = f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ cuando $|x|$ —el **módulo** de x, es decir, su valor sin el signo $\pm$— se acerca a 2. Observa que el resultado comienza a parecerse a $0/0$, el cual se denomina *indeterminación*. Sin embargo, tus valores van a sugerir que este cociente se acerca cada vez más 4 —decimos que "tiende a (el límite) 4". Demuestra que escribiendo $(x^2-4) = (x+2)(x-2)$, puedes probar que este valor es el límite *exacto* en $x = 2$, es decir,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 2 + x = 4.$$

(8) La fracción del ejercicio 7 tiende a un límite también cuando x se hace tan grande como queramos (indefinidamente grande o 'infinito'). Demuestra que dicho valor límite es x y que, por tanto, puede ser indefinidamente grande.

(9) Demuestra que la fracción $y = (2x^2+5)/(x^2+3x)$ tiende al límite *infinito* $y = 2$ cuando $x \to \infty$. (El símbolo ∞ representa a "infinito".) En tal caso, decimos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5}{x^2+3x} = 2.$$

(10) Utiliza los primeros términos de las series definidas por $y = \sin x$ e $y = \cos x$, dados en (1.6), para determinar los límites de las siguientes funciones cuando $x \to 0$:

(a) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

(b) $y = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

(c) $y = \dfrac{\cos(ax)-1}{x^2}$ $\qquad (a = \text{constante})$

(d) $y = \dfrac{x\cos x - x}{x^3}$

(e) $y = x\sin x + \cos x$

Capítulo 2

El cálculo infinitesimal

2.1. La velocidad de un cuerpo que cae

En el capítulo anterior hemos hablado de la relación entre dos magnitudes variables, una (la variable dependiente) determinada a partir del valor de la otra (la variable independiente). Por ejemplo, la velocidad v de un objeto que cae depende del tiempo t (es decir, de cuánto tiempo llevo cayendo). Podemos utilizar este ejemplo sencillo para introducir las principales ideas de la rama de las Matemáticas que se conoce como 'análisis matemático' o 'cálculo', que a su vez se subdivide en dos: el **cálculo diferencial** y el **cálculo integral**. El primero se refiere a las *tasas de variación*. Esto es, si empleamos x e y para representar las variables independiente y dependiente, respectivamente, el cálculo diferencial trataría de responder a preguntas como: ¿cuán rápido cambia y a medida que aumenta x?

El segundo tipo de cálculo se refiere a cómo pueden sumarse —"integrarse"— pequeños cambios en y, realizados uno tras otro, para obtener el cambio *total* experimentado por y al introducir un cambio grande en x.

La relación entre s, la distancia recorrida por la piedra que cae (comenzando desde el reposo), y t, el tiempo necesitado para realizar tal recorrido, forma una parábola, como la de la Fig. 2. Sin embargo, sólo se necesita la rama positiva de la curva (ya que el tiempo *después* del comienzo se cuenta positivamente). La curva es continua, creciendo s más y más rápidamente a medida que lo hace t (es decir, a medida que pasa el tiempo). Expresado en forma de ecuación,

$$s = s(t) = ct^2. \tag{2.1}$$

Al decir "más y más rápidamente", estamos introduciendo la idea de **velocidad** (o 'celeridad', término más preciso si sólo consideramos su valor numérico e ignoramos la dirección y sentido). Si la velocidad crece una cantidad a durante el primer segundo, la misma cantidad en el siguiente segundo y así sucesivamente, diremos además que la piedra se mueve con una '**aceleración** a constante' y que v es *proporcional* a t. Esto quiere decir que si duplicas t, el valor de v también se duplicará. En forma de ecuación,

$$v = v(t) \propto t = at. \tag{2.2}$$

Las dos relaciones (distancia/tiempo y velocidad/tiempo) se muestran, respectivamente, en las Figs. 8 y 9. La 'constante de proporcionalidad' a en (2.2) tiene el valor

$$a = \text{constante} \approx 9{,}81 \text{ m}\,\text{s}^{-2}. \tag{2.3}$$

(Observar que si pones $t = 1$ s en (2.2), verás que la velocidad tras 1 s es $=$ (9,81 m s^{-2})$\times$(1 s) $=$ 9,81 m s^{-1}, por lo que la unidad cumple la ecuación.)

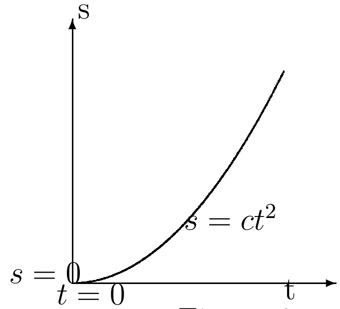


Figura 8

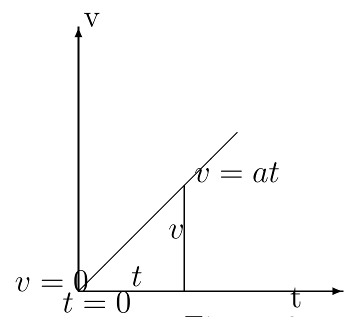


Figura 9

Las últimas dos ecuaciones explican, más o menos, todo lo que necesitamos conocer sobre la caída de cuerpos y que utilizaremos mucho posteriormente. Lo importante sobre a es que su valor es, aproximadamente, el mismo para *cualquier* tipo de objeto que arrojemos en *cualquier lugar* sobre la superficie de la Tierra. Veremos más sobre este tema en el Manual 4; aquí sólo nos interesan los aspectos matemáticos.

Ahora miremos la gráfica de $v = v(t)$, Fig.9, que es una recta que pasa por el origen: muestra v como una función *lineal* de t. La *pendiente* de esta recta es $a = v/t$, el incremento en velocidad (dibujado en la dirección 'arriba') dividido entre el incremento de tiempo (dibujado en la dirección 'izquierda-derecha'). Puede compararse a la subida por una colina: la pendiente mide lo escarpado de la colina.

Tenemos las siguientes fórmulas: (i) $s = ct^2$, (ii) $v = at$, (iii) $a =$ constante. ¿Cómo se relacionan entre sí?

¿Qué ocurre a medida que incrementamos t en un pequeño δt? (Recordad que la letra griega δ no representa a algo *multiplicando* a t, sino que significa “una infinitésima parte de”.) Mientras que el tiempo aumenta de t a $t + \delta t$, v va de v a $v + \delta v$, como podemos ver en la Fig.10:

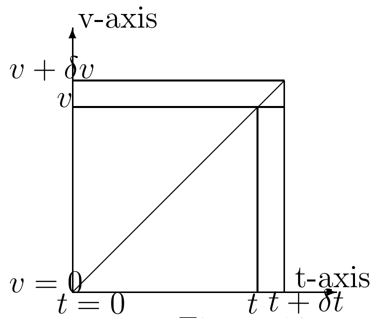


Figura 10

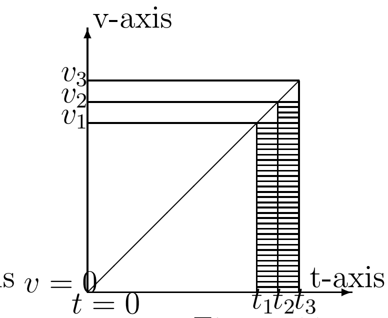


Figura 11

La constante a, a la cual hemos denominado antes “aceleración”, es la *tasa de incremento de v, con respecto de t*; es la *pendiente* (v/t) de la recta en la Fig.10.

La distancia caída s también aumenta un poco, ya que algo que se mueve con velocidad v avanzará una distancia $v \times \delta t$ durante el pequeño intervalo de tiempo δt. Aquí utilizaremos el valor de $v = v(t)$ al principio del intervalo porque no variará mucho en tan pequeño cambio de tiempo. En resumen:

> Cuando el tiempo avanza de t a $t + \delta t$,
>
> v aumenta a $v + \delta v$, donde $\delta v = a\delta t$ (siendo a la *pendiente* de la gráfica de v)
>
> s incrementa a $s + \delta s$, donde $\delta s \approx v\delta t$, con lo que por tanto podemos calcular δs, la *distancia extra* recorrida durante el intervalo δt, que es aproximadamente el *área* de un diminuto rectángulo de altura v y anchura δt.

Ahora dibujemos líneas verticales desde el eje del tiempo t hasta la recta $v = v(t)$ en puntos más o menos próximos, como, en la Fig.11, $(t_1, v_1), (t_2, v_2), (t_3, v_3)$. Para cada incremento de velocidad

$$\delta v_1 = a\delta t_1, \quad \delta v_2 = a\delta t_2, \quad \delta v_3 = a\delta t_3,$$

hay un correspondiente incremento en la distancia recorrida; estos incrementos se pueden aproximar como

$$\delta s_1 = v_1\delta t_1, \quad \delta s_2 = v_2\delta t_2, ...$$

que, en la Fig.11, son representadas como el área de los rectángulos sombreados.

Podéis imaginaros lo que sigue. Dividimos todo el tiempo desde $t = 0$ hasta $t = T$, digamos, cuando la piedra golpea el suelo, en pequeñísimos intervalos δt, con lo que la distancia *total* caída en el tiempo T quedará representada como la *suma* de las áreas de todos los rectángulos, dibujados igual que los de la Fig.11, entre los límites $t = 0$ y $t = T$. Como se puede ver en la Fig.12, esto es prácticamente lo mismo que el área del triángulo que forman contiene a todos los rectangulitos; y este área es la *mitad* del área del rectángulo cuyos lados horizontales y verticales tienen respectivamente una longitud de T y V.

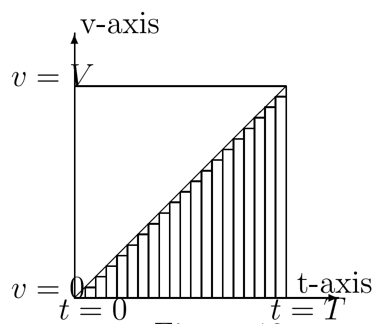


Figura 12

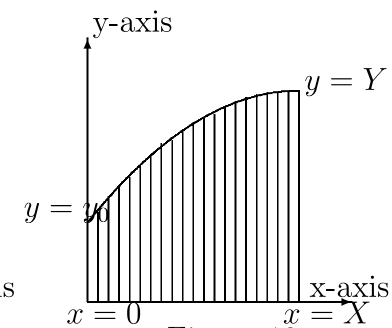


Figura 13

Usando que $V = aT$, podemos obtener la siguiente fórmula para calcular la distancia total caída en un tiempo T:

$$\text{Distancia total recorrida} = \tfrac{1}{2}(T \times V) = \tfrac{1}{2}aT^2. \tag{2.4}$$

Por tanto, ahora podemos relacionar las constantes que veíamos en (2.1) y (2.2): $c = \frac{1}{2}a$.

Sobre este ejercicio que hemos realizado, hay que mencionar un par de cosas. Lo primero, que la piedra en caída libre es únicamente un ejemplo sencillo de un proceso que se puede realizar para *cualquier* relación $y = f(x)$ entre dos variables, – incluso cuando la pendiente de la gráfica que forman no sea constante, como es el caso de a, sino que esta varíe, formando una curva como la de la Fig.13 en lugar de una línea recta –. Lo segundo, que los resultados que hemos obtenido han sido casi todo el rato aproximaciones, debido a que consideramos pequeñas variaciones δt, pero no *muy, muy pequeñas*, o "infinitésimas": si hacemos las divisiones lo suficientemente pequeñas, podemos obtener resultados tan precisos como necesitemos, siendo estos *exactos* 'en el límite $\delta t \to 0$'. En la próxima Sección analizaremos todo esto de forma más detenida.

Antes de empezar con el análisis matemático, resumamos lo que hemos descubierto utilizando únicamente gráficos y geometría sencilla. Para cualquier función $y = F(x)$, la tasa de variación de la variable dependiente y, con respecto a aumentos de δx coincide con la pendiente de la curva en el punto (x, y) que estudiemos – no exactamente en este punto, sino en el pequeño intervalo en el que x aumenta hasta $x + \delta x$.

En el ejemplo de la piedra, la función que ahora llamamos F calculaba la distancia s recorrida, en función del tiempo t: $s = F(t)$; y el ratio de variación de s con respecto de t, la pendiente de la gráfica de F, lo denominamos velocidad v. De la misma manera, podemos escribir $v = f(t)$, ya que vimos que v no era constante, sino que dependía también de en qué parte de la curva $F(t)$ la calculásemos. Por lo que nos interesan dos funciones de la variable independiente t:

$$s = F(t), \qquad v = f(t) = (\text{pendiente de } F(t) \text{ en un punto } t) \tag{2.5}$$

Además, en las dos últimas Figuras, vimos como el *área* bajo una curva como $v = f(t)$, entre dos límites $t = 0$ y $t = T$, podía utilizarse para obtener la función $s = F(t)$. Eso es vital, ya que implica que, al igual que podemos obtener la función $f(x)$ como *pendiente* de otra función $F(x)$, podemos también conseguir $F(x)$ a partir del *área*, bien definida, bajo la gráfica de la función $f(x)$. En resumidas cuentas, hemos ideado un método para pasar de una función a la otra *en cualquier dirección*: encontrar la pendiente de una función lo denominamos 'derivación'y su estudio se llama **cálculo diferencial**, mientras que calcular su área se denomina 'integración', y su estudio, **cálculo integral**. Muy a menudo estas dos ramas del cálculo se estudian por separado; pero en realidad son 'dos lados de una misma moneda', la integración es simplemente la operación **inversa** a la derivación. Las estudiaremos ambas en las siguientes secciones.

2.2. Infinitesimalmente grande, infinitesimalmente pequeño. Los límites

Existen tres ramas principales de las Matemáticas. La primera de ellas parte de conceptos sobre números y sobre el uso de símbolos en aritmética y álgebra; esta rama la desarrollamos bastante en profundidad en el Manual 1. La segunda trata temas relacionados con el espacio y la geometría; ésta la estudiamos en el Manual 2. Estas dos ramas tuvieron sus orígenes hace milenios, pero la tercera gran rama de las matemáticas es mucho más reciente: comenzó a desarrollarse hace apenas tres siglos, y es la que denominamos Análisis Matemático. Comprende muchos conceptos de los que ya hemos visto algo (por ejemplo, las 'series infinitas'que usamos en el Manual 1 para definir números que no podíamos definir mediante un número finito de operaciones elementales, como la multiplicación y división); pero los estudia de manera mucho más precisa y cuidadosa. En la última Sección, ya pensamos en utilizar 'procesos infinitos': por ejemplo, la tasa de variación de $y = f(x)$ la definíamos en un punto sobre la curva fijándonos en la *pendiente* de esta curva en un intervalo cuyos extremos estaban 'infinitamente próximos'– siendo el reducir una parte de la curva a un único punto el proceso infinito. Otro ejemplo era la división de un área en un número infinitamente grande de rectángulos infinitamente estrechos. Estos procesos infinitos son diferentes de aquellos que vimos en el Manual 1 (por ejemplo en el Capítulo 5) porque tratan con *funciones*, en lugar de con secuencias de números. También nos hemos encontrado con el concepto de *límite*, como el número al que la suma de una serie de n términos se acerca a medida que n aumenta y aumenta. Un ejemplo de ello era el número decimal $0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + 0{,}00001 + ... = 0{,}11111 ...$ que representa la fracción 1/9; se acerca y acerca al límite, pero para llegar de manera exacta, se necesitaria hacer un número infinito de sumas, ya que la serie nunca termina.

Bueno, dentro de esta Sección el primer proceso infinito que vamos a tratar es el cálculo de la *pendiente* de una curva en el punto P con coordenadas (x, y).

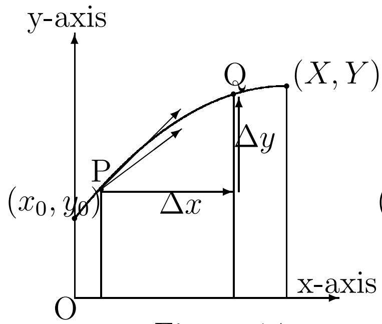


Figura 14

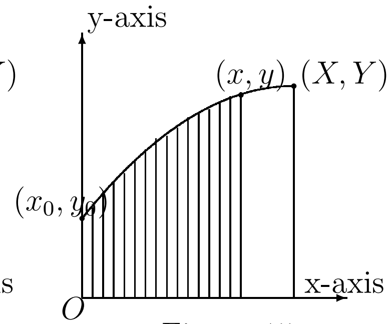


Figura 15

En la Fig.14 la pendiente *media* de la curva en el intervalo PQ es igual a $\Delta y/\Delta x$ (distancia 'vertical', dividida entre distancia 'horizontal'); pero esto no es lo mismo que la pendiente "*en el punto* P". (Fijaos en que los puntos inicial y final de la curva los expresamos como (x_0, y_0) y (X, Y), de la misma manera que P es (x, y) y que Q tiene como coordenadas $(x + \Delta x, y + \Delta y)$) En la Fig.14 se muestra la tasa de variación de y a medida que x aumenta – simplemente es la pendiente de la línea que pasa por P y Q. En análisis matemático, trabajamos con las tasas de variación $\Delta y/\Delta x$ y estudiamos cómo estas varían cuanto más pequeños son los intervalos. Cuando Δx y Δy son finitos, su cociente sólo aproxima la pendiente de la curva en el punto P – y es lo que denominamos 'tasa de variación media'– pero lo que realmente queremos es la pendiente de la recta que *toca* a la curva en el punto P (esta recta se denomina la **tangente** en P de la función). Para hallarla, no vamos a poner una regla junto a la función y hacer medidas: vamos a utilizar únicamente la aritmética.

Comenzamos tomando de la función variaciones muy muy pequeñas a las que llamaremos δx y δy en lugar de Δx y Δy, y calculamos el cociente $\delta y/\delta x$ haciendo esta división. Pero a medida que δx se hace más pequeño, más complicada resulta la tarea. Tomemos como ejemplo $y = x^2$, en el punto donde $x = 6, y = 6 \times 6 = 36$. Primero apliquemos una pequeña variación $\delta x = 0{,}01$ y calculemos el valor de y en el nuevo punto donde x valga $x+\delta x = 6{,}01$. El valor de la nueva y será de $y + \delta y = (6{,}01)^2 = 36{,}1201$, por lo que el incremento δy valdrá 0.1201 y el cociente $\delta y/\delta x$ será de $0.1201/0.01 = 12.01$.

Ahora tomemos $\delta x = 0{,}001$, para tener un valor de $\delta y/\delta x$ todavía más próximo al punto $x = 6, y = 36$. El resultado será

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{36{,}012001 - 36{,}000000}{0{,}001} = \frac{0{,}012001}{0{,}001} = 12{,}001,$$

que es casi exactamente 12. Si continuamos con el proceso, cada vez hallaremos valores más y más próximos a este número, pero para obtenerlos necesitaremos primero calcular la función $y = x^2$ de manera cada vez más precisa, y luego dividir δy que es casi 0 entre δx, que también es próximo a 0. Estamos buscando un límite, en este caso 12, que parece estar cercano a 0/0 lo que no tiene sentido. ¡Debe haber una forma más fácil de hallarlo!

Como hemos dicho antes, otro proceso infinito con el que nos encontramos en la última sección fue el cálculo del área bajo una curva mediante su división en rectángulos estrechos: La Fig.15 os refrescará la memoria sobre el problema. El área total que queremos calcular, llamémosla A, está contenida entre la curva de la función, el eje X y los límites verticales en x_0 y x. En la figura se nos muestra ya hecha la división en rectangulitos; en ella, si un rectángulo de altura y tiene una anchura de δx entonces su área será de $\delta A = y \times \delta x$ – aunque no de manera exacta, ya que la parte superior del rectángulo está curvada. Como ya hemos visto, a medida que usemos un mayor número de tiras más y más delgadas, la aroximación mejora: obtendremos el límite *de manera exacta* sólo si tomamos un número infinito de tiras infinitésimamente pequeñas – ¡pero aún no sabemos cómo hacerlo!

Lo que sí podemos ya afirmar es que, si añadimos un rectangulito más a la derecha del último, el área total A aumentará en δA; con lo que conocemos la *tasa de variación del área* a medida que el límite derecho se mueve – $X \rightarrow X + \delta x$. Es el cociente $\delta A/\delta x$, y para la función $y = x^2$ este es

$$\frac{\delta A}{\delta x} = \frac{y\delta x}{\delta x} = y = x^2$$

– lo que es un resultado exacto, con δx en el numerador siendo cancelado con δx en el dneominador.

En resumen, el área es una función de x, la posición de su límite derecho

$$A = A(x), \quad \delta A/\delta x = f(x).$$

En otras palabras, para cualquier función dada $y = f(x)$, podemos no conocer su correspondiente función área $A(x)$, pero sí sabemos que la pendiente de la gráfica de $A = A(x)$ en un punto (x, y) vendrá dada por la función original $f(x)$.

En la Sección siguiente, estudiaremos cómo calcular pendientes y áreas de manera exacta – lo que es un problema central del Cálculo.

2.3. Derivadas e integrales

En la Sección anterior vimos que calcular la pendiente de una gráfica en un punto dado, mediante el límite $\delta y/\delta x$, no es fácil: a medida que δx y δy

tienden a 0, no está claro a cuánto tenderá su cociente, ya que 0 entre 0 no significa nada.

Para solucionar este problema, utilizaremos el mismo ejemplo, $y = f(x) = x^2$ pero ahora trataremos de simplificar la fracción $\delta y/\delta x$ expresando δy en función de δx y viendo si algo se cancela. De esta manera podemos obtener un resultado, usando álgebra antes de tener que aplicar la aritmética.

Cuando sustituimos los Δx y Δy de la Fig.14 por los mucho más pequeños δx y δy, la coordenada y del punto superior (Q) de la gráfica se convertirá en

$$y + \delta y = (x + \delta x)^2 = (x + \delta x) \times (x + \delta x) = x^2 + 2x\delta x + \delta x^2$$

y sustituyendo y $(= x^2)$ nos queda la siguiente expresión para δy:

$$\delta y = 2x\delta x + \delta x^2.$$

Si ahora dividimos ambos lados entre δx nos queda

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 2x + \delta x$$

y esto es cierto para cualquier δx.

Así que sí existe el límite cuando $\delta x \to 0$ y es $2x$. Escribimos el resultado como

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = 2x.$$

Este valor, el del límite del cociente, nos da la pendiente de la curva de la Fig.14 *en el punto* P, y se denomina la **derivada** en el punto $\mathrm{P}(x, y)$ de la función $y = f(x)$. Frecuentemente, se escribe como $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, para que se asemeje a un ratio; pero no se debe olvidar que es sólo el nombre con el que denominamos al número.

En la anterior Sección calculamos, para $x = 6$, el valor aproximado $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \approx 12{,}001$; pero ahora podemos afirmar que su valor *exacto* es $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 2x = 12$.

Podemos también escribir una fórumla para encontrar la derivada $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ de *cualquier* función $y = f(x)$ yendo a través de los mismos pasos – pero cambiando el $y = x^2$. Para obtener el numerador en la fracción $\delta y/\delta x$, antes de calcular el límite con $\delta x \to 0$, simplemente tomamos la diferencia de dos valores de la función, $f(x + \delta x)$ menos $f(x)$, y luego dividimos entre δx:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

finalmente, aplicamos el límite $x \to 0$ y así obtenemos el valor numérico de $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} \tag{2.6}$$

Y así es como **derivamos**, o lo que es lo mismo, "encontramos la derivada" ¡de cualquier función!

Entonces, volvamos al otro proceso infinito que queríamos estudiar – el de calcular el área bajo una curva mediante su división en pequeísimos rectángulos verticales, o "tiras". A este proceso le llamamos **integración** de la función $y = f(x)$ (a partir de cuya curva queremos calcular el área) y al resultado que obtenemos le llamamos *integral* de la función. Siendo más precisos, como veremos más adelante, existen varios tipos de integrales; en este caso integramos dentro de unos límites (las barras verticales que definían la porción de área que queríamos calcular) a los que podemos llamar $x = X$ y $x = x_0$, como en la Fig.15, por lo que el resultado que obtendríamos se denomina realmente **integral definida** desde $x = x_0$ hasta $x = X$.

Para calcular el área podemos comenzar con tiras de anchura Δ, de tal manera que la primera vaya desde $x = 0$ a $x_1 = \Delta$, la siguiente desde $x_1 = \Delta$ a $x_2 = 2\Delta$, y así sucesivamente, hasta que llegamos a la última, que acabe en $X = N\Delta$. Para una función lineal $y = f(x) = x$, como la de la Fig.11, los valores correspondientes de la y serán $y_1 = x_1,\ y_2 = x_2,\ ...\ y_N = X$; y la suma de las áreas de las N tiras será

$$S_N = y_1\Delta + y_2\Delta + \ ...\ y_N\Delta = (1 + 2 + 3 + \ ...\ N)\Delta^2$$

Del Manual 1 sabemos como estudiar una serie como esta. La escribimos otra vez, en orden inverso, tal que

$$S_N = (N + (N-1) + (N-2) + \ ...\ 1)\Delta^2$$

y sumamos las dos series, con lo que obtenemos $2S_N = N \times (N+1)$ (ya que hay N términos, cada uno con el mismo valor: $(N+1)$). Por lo tanto, el área total vale

$$S_N = \tfrac{1}{2}N(N+1)\Delta^2 \qquad (2.7)$$

, de lo cual deducimos que ésta depende del número de tiras que hayamos utilizado.

Necesitamos calcular el valor en el *límite* de (2.7) cuando N tiende a infinito, y los rectangulitos son infinitamente estrechos. Y podemos obtenerlo en función del valor del límite superior de integración (X), porque $X = N\Delta$ y por ello Δ depende del número de tiras: $\Delta = X/N$. Si aplicamos esto en (2.7) nos damos cuenta de que

$$S_N = \tfrac{1}{2}N(N+1)(X^2/N^2) = \tfrac{1}{2}X^2\left(1 + \tfrac{1}{N}\right). \qquad (2.8)$$

Ahora está claro que cuando $N \to \infty$, $S_N \to \frac{1}{2}X^2$. Este límite de la suma es el área *exacta* bajo la curva comprendida entre los límites de integración

$x = 0$ y $x = X$: es la *integral definida* de la función $y = f(x)$, desde $x = 0$ a $x = X$ y lo representamos de la siguiente manera:

$$y = f(x) = x, \qquad \int_0^X f(x)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}X^2. \tag{2.9}$$

Por supuesto, no hay nada especial sobre el límite superior $x = X$; o relacionado con el nombre que usemos para la variable independiente – podríamos perfectamente utilizar t en lugar de x. Por lo que la integral en (2.9) se puede escribir igualmente como

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Al definirla de esta manera, la denominamos integral 'indefinida'de $f(x)$, y se suele escribir $\int f(x)\mathrm{d}x$. ¡Pero ya entraremos en detalles luego!

El símbolo $\int$ usado en (2.9) representa una 'gran S', para indicar 'suma', y el $\mathrm{d}x$ sirve para recordar sobre qué variable estamos integrando; en este caso, 'con respecto de x'. El 0 y la X indican, como hemos visto antes, el 'intervalo' en el que integramos, desde el límite inferior 0, abajo, hasta el superior X, arriba. Esta es la notación más común utilizada en la actualidad, pero como vimos al final de la Sección 3.1, la integración no es más que la operación *inversa* a la derivación – por lo que es perfectamente válido usar el símbolo D, para la *operación* de derivar, y D^{-1} para la integración. Trataremos esto en profundidad en próximos capítulos, pero id quedándoos con la idea de que si dos funciones $f(x)$ y $F(x)$ están relacionadas por

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}, \quad F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x, \tag{2.10}$$

enonces podemos perfectamente escribir también

$$f(x) = \mathsf{D}F(x), \quad F(x) = \mathsf{D}^{-1}f(x). \tag{2.11}$$

Vamos a hacer un pequeño aparte para dejar definidos algunos términos que vamos a utilizar más adelante:

- Diferenciales Cuando calculábamos la derivada de una función $y = f(x)$, dijimos que $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ era un valor numérico (que calculábamos como límite de una expresión) y no una fracción con dos números distintos, $\mathrm{d}y$ y $\mathrm{d}x$. Pero (¡siempre que seamos cuidadosos!) *podemos* utilizar los símbolos $\mathrm{d}x$ y $\mathrm{d}y$ por separado, pasando a denominarse ambos **diferenciales** de su respectiva variable.

Al principio de esta Sección utilizamos el ejemplo $y = f(x) = x^2$, para el cual descubrimos que si la x aumenta δx, y aumentará $\delta y = 2x\delta x + \delta x^2$. La tasa de variación de y para x, en un intervalo muy próximo al punto (x, y), era por tanto

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 2x + \delta xa$$

y $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ *en el punto* (x, y) se calculaba como el límite de la siguiente expresión:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = 2x.$$

Si ahora usamos $\mathrm{d}x$ para nombrar al infinitésimo incremento δx, llamándolo "diferencial", sigue que

$$\delta y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \mathrm{d}x^2.$$

En otras palabras, el aumento de y será $\delta y = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)\mathrm{d}x + \mathrm{d}x^2$. Esta es la razón por la cual, especialmente en libros antiguos, se suele hacer alusión a la derivada $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ como el "primer coeficiente del diferencial" – ya que, cuando δy se expresa mediante potencias de $\mathrm{d}x$, entonces $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ es el primer coeficiente de la expansión.

El diferencial $\mathrm{d}y$ se define simplemente ignorando todos los términos de la expansión tras el primero. Con esta definición, podemos escribir

$$\mathrm{d}y = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)\mathrm{d}x \tag{2.12}$$

y si dividimos ambos lados de la ecuación entre $\mathrm{d}x$ resulta que la derivada $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ (valor numérico) puede ser escrita como el cociente entre dos diferenciales, $\mathrm{d}y$ entre $\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{d}y \div \mathrm{d}x = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x) \tag{2.13}$$

- donde el símbolo de división $(\div)$ se usa para mostrar que la cantidad a la izquierda es realmente un cociente entre dos pequeñas cantidades, en vez de el coeficiente diferencial $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)$. Pero recordad que (2.13) parte del modo en que hemos definido $\mathrm{d}y$; y que, tomemos lo pequeño que tomemos $\mathrm{d}x$, el diferencial $\mathrm{d}y$ no será exactamente igual al correspondiente cambio (δy) en y. Veremos ejemplos en los que trabajar con diferenciales puede resultar muy útil.

- Derivadas sucesivas Al comienzo de la Sección 3.1, usamos el símbolo D para hacer referencia a la *operación* "derivar con respecto de x", tal que

$$\mathsf{D}y = \mathsf{D}f(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

es una notación más para la derivada de una función. Pero, ya que en general la derivada de $f(x)$ es otra función de x (que usualmente se escribe $f'(x)$) podemos derivar a ésta una segunda vez, con lo que obtenemos

$$\mathsf{DD}y = \mathsf{DD}f(x) = \mathsf{D}f'(x) = f''(x)$$

– una vez más, otra función de x, que denominamos **segunda derivada** de $f(x)$. Y esto se puede repetir para obtener hasta la derivada $n$ésima.

Si usásemos la notación original para derivar, escribiendo $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)$ en lugar de D, esta última ecuación se convertiría en

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f'(x) = f''(x)$$

y esto se puede acortar escribiendo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x) = f''(x). \tag{2.14}$$

Esta es la notación que a menudo utilizamos para las segundas, y sucesivas, derivadas: corresponde a tomar el 'cuadrado' de la operación $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ y para expresar la 'derivada $n$ésima' lo hacemos de manera similar mediante

$$\mathsf{D}^n y = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

En el próximo Capítulo comenzaremos haciendo una colección de derivadas e integrales de algunas de las funciones más comunes. Pero antes de hacerlo, debemos pensar cómo podremos utilizarlas, ya que no podemos hacer una colección lo suficientemente grande como para incluir *todas* las funciones que vayamos a necesitar alguna vez, – ¡ya que esta lista nunca acabaría! Sin embargo, las derivadas e integrales de una pequeña lista de funciones sí nos pueden ser útiles si sabemos como *combinarlas.*

2.4. Construyendo objetos más grandes

Suponga que tenemos ya hecha una lista con funciones estándar, $u = u(x),\ v = v(x), ...$ y sus derivadas con respecto a la variable x, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = u'(x),\ \mathrm{d}v/\mathrm{d}x = v'(x), ...$ (fijaos en que estamos usando la notación corta $u'(x)$ para representar la nueva función que obtenemos como derivada de la original).

Para construir funciones más complejas, podemos comenzar simplemente *sumando* dos funciones de la lista, para obtener otra función $f(x) = u(x) +$

$v(x)$; o podemos multiplicar cualquier función por un número (constante) c, formando $f(x) = cu(x)$; o también podemos mutiplicar $u(x)$ y $v(x)$ por los números a y b y *después* sumarlas, para conseguir $f(x) = au(x) + bv(x)$. Y en cada caso, querremos más tarde obtener su correspondiente derivada $f'(x) = \mathrm{d}f/\mathrm{d}x$.

También puede que queramos hallar la derivada de una función que sea *producto* de dos de las funciones de la lista, $f(x) = u(x)v(x)$.

Finalmente, también puede ser útil estudiar la derivada de una función *dentro de otra*: si definimos $v = v(x)$, tomando $f(x) = u(v)$, obtenemos la función $f(x) = u[v(x)]$ – que es una función únicamente de x, pesar de utilizar la variable intermedia v (en lugar de x) en la fórmula definida como $u(x)$.

Trataremos, por partes, estos tres métodos de construcción de nuevas derivadas: (i) derivación de una suma, (ii) derivación de un producto, y (iii) derivación de la 'función de una función'. Estos tres métodos son vitales para poder manejar de manera útil las derivadas, y por tanto es imprescindible aprender a usarlos.

(i) Derivada de una suma; $y = u + v$

Partamos de la definición de $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ en la ecuación (2.6):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}, \tag{2.15}$$

que se cumple para *cualquier* función $y = f(x)$. Expresemos la derivada de $u(x)$ con la misma expresión, cambiando las y por u:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta u}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{u(x+\delta x) - u(x)}{\delta x}, \tag{2.16}$$

y lo mismo para $v(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta v}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{v(x+\delta x) - v(x)}{\delta x}. \tag{2.17}$$

Ahora sustituyamos $f(x) = u(x) + v(x)$ en la última expresión de (2.12):

$$\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = \frac{u(x+\delta x) - u(x)}{\delta x} + \frac{v(x+\delta x) - v(x)}{\delta x},$$

. Si después aplicamos el límite $\delta x \to 0$ en los tres términos nos queda: el primero, como vemos en (2.15), $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$; el siguiente nos da $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ – de (2.16) – y el último $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ – de (2.16).

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \tag{2.18}$$

– En otras palabras, **la derivada de una suma de funciones es la suma de sus derivadas**

Ahora estudiemos un caso más general, $f(x) = au(x) + bv(x)$, donde a, b son constantes, y aplica el mismo razonamiento. Llegarás a que

$$y = au + bv : \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + b\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}. \tag{2.19}$$

Por ello se dice que la operación de derivar es **lineal**: cuando se aplica a una *suma* de dos o más funciones, nos da el mismo resultado que si sumamos los resultados que obtendríamos de cada función por separado.

(ii) Derivada de un producto de funciones; $y = uv$

Para este caso, reutilizaremos las expresiones (2.15), (2.16), y (2.17); pero ahora, en lugar de $y = f(x) = u(x) + v(x)$, tenemos que $y = f(x) = u(x) \times v(x)$. Así que cuando x aumente en δx la función $u(x)$ cambiará a $u(x + \delta x)$ y $v(x)$ a $v(x + \delta x)$. La fracción

$$\frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

se convertirá entonces en

$$\frac{u(x + \delta x)v(x + \delta x) - u(x)v(x)}{\delta x}$$

lo que puede verse de manera más fácil si recordamos que $u(x+\delta x)$ representa nada más que el nuevo valor de $u(x)$, tras $x \to x+\delta x$ – al que hemos llamado $u + \delta u$; y lo mismo con $v(x + \delta x)$: significa $v + \delta v$.

Por ello esta fracción se puede escribir de manera más simple como

$$\frac{(u + \delta u)(v + \delta v) - uv}{\delta x} = \frac{(u\delta v + v\delta u + \delta u\delta v)}{\delta x},$$

donde únicamente hemos multiplicado el producto del numerador, y hemos restado el término uv. Así, la fracción cuyo límite vamos a calcular es una suma de tres términos:

$$u\frac{\delta v}{\delta x}, \qquad v\frac{\delta u}{\delta x}, \qquad \frac{\delta u\delta v}{\delta x}. \tag{2.20}$$

Cuando aplicamos $\delta x \to 0$, los dos primeros términos juntos nos dan

$$u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

– para lo que hemos usado las expresiones (2.16) y (2.17). Pero el tercer término nos da

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta u \delta v}{\delta x}$$

y esto puede reescribirse de dos maneras:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\delta v, \quad \text{o} \quad \delta u \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

En cualquiera de los casos, el resultado contiene un factor (δv o δu) que debe tender a 0 a medida que $\delta x \to 0$, ya que los *ratios* $\delta v/\delta x$ y $\delta u/\delta x$ son números finitos. Por lo que podemos olvidarnos del tercer término en (2.20) y quedarnos sólo con los dos primeros. En el límite, entonces, nos hemos quedado con

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{2.21}$$

En resumen, si conocemos las derivadas de dos funciones, podemos calcular la derivada de su producto; es el producto de la primera función por la derivada de la segunda, más el producto de la segunda función por la derivada de la primera. Tenga en cuenta que si una de las funciones es simplemente una constante (por ej., $u = c$, con lo que $y = cv$) habrá un único término, ya que $\mathrm{d}c/\mathrm{d}x = 0$: por lo tanto, para $y = cv$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = c\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ – la derivación no altera la constante.

(iii) Derivada de la 'función de otra función'; $y = f(u),\ u = u(x)$

Ahora piense en $f(u)$ como una función de la variable x – lo que en realidad es cierto, ya que u tiene un único valor para cada valor de x y por tanto este valor es el que determina $y = f(u) = g(x)$. Hemos cambiado el nombre de la función por $g(x)$, ya que la operación que se realiza con la x en la función compuesta hemos dicho que era más larga (y por tanto distinta) a la que hace la función f con la u para obtener $y = f(u)$.

Si x aumenta a $x + \delta x$, u cambiará a $u + \delta u$ y podemos definir $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ como el límite del cociente $\delta u/\delta x$. También podemos calcular $\mathrm{d}y/\mathrm{d}u$ como el límite del ratio $\delta y/\delta u$; pero lo que nos interesa es $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ – la tasa de variación de y con respecto a x, y no a u. ¿Cómo podemos conseguirla? Debemos usar un truco, pensando primero en pequeños y finitos cambios, antes de entrar en el límite.

Mientras las variaciones sean finitas, las tasas de variación *aproximadas*, $\delta y/\delta u$ y $\delta u/\delta x$ serán simples *fracciones*; por lo que se cumple que

$$\frac{\delta y}{\delta u}\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta x},$$

ya que el factor δu en el numerador y denominador de la izquierda se cancelan. *Ahora* podemos ir al límite con δx, δu, δy convirtiéndose cada vez en más pequeños. Ambos lados de la igualdad se mantienen igual, pero ahora están expresados con diferenciales:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{2.22}$$

Este proceso, en el cual la función que realmente nos interesa, $y = g(x)$, está escrita de manera más simple en función de otra variable u, se suele denominar “cambio de variable” o “sustitución”, y es una técnica muy común utilizada en muchos aspectos del cálculo. En posteriores capítulos, y en los ejercicios, encontraremos muchos ejemplos que nos ayudarán a entender cómo funciona.

Con los tres métodos de arriba, podemos derivar cualquier función – ¡no necesitarás nada más!

Ejercicios

1) La gráfica de la Fig.13 se corresponde a la función

$$y = 2 + \frac{4x}{3} - \frac{x^2}{9}.$$

Dibuja la curva por tí mismo, con la x comprendida entre 0 y 6 unidades. Ahora observa la misma curva en la Fig.14 y calcula

(i) los valores de y en los puntos P, con $x = 1$, y Q, con $x = 4$

(ii) comprueba que el punto (X, Y), con $X = Y = 6$ también pertenece a la curva

(iii) calcula la pendiente de la recta PQ (que pasa por P y Q)

2) Encuentra un valor *aproximado* de la pendiente de la curva de la Fig.14, *en el punto* P, usando el mismo método que usamos en la p.20 con la función $y = x^2$. Compara este valor con el de la pendiente calculada anteriormente de la recta PQ – ¿ha sido una *buena* aproximación? Comprueba también que cerca del punto $(6, 6)$, que es un ‘máximo’(punto más elevado de un intervalo), la pendiente de la recta parece ser 0.

3) Utiliza el método explicado en la Sección 2.3 para encontrar las derivadas

de las funciones (i) $y = ax$, (ii) $y = bx^2$, (iii) $y = cx^3$ (siendo a, b, c constantes). (*Pista*: usa la definición (2.6) de $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$.)

4) Usa los resultados del último ejercicio, junto con la expresión (2.19), para obtener la derivada ($\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$) de la función del Ejercicio 1. Más tarde usa esta derivada para calcular los valores *exactos* de la pendiente en los puntos P, Q, y el punto final (X, Y).

5) Utiliza la definición (2.6) para obtener la derivada de $y = x^{-1}$. (*Pista*: usa

$$\delta y = \frac{1}{x + \delta x} - \frac{1}{x}$$

y saca común denominador $x(x+\delta x)$ en las funciones. Calcula $\delta y/\delta x$ cuando $\delta x \to 0$.)

6) Encuentra la derivada $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ de cada una de las siguientes funciones

- $y = x(1 - x)$ (*Pista*: Esta función es producto de $u = x$ y $v = (1 - x)$)
- $y = (1 - x)^2$ (*Pista*: Es una función de $u = (1 - x)$)
- $y = x(1 - x)^2$ (*Pista*: Es un producto de dos funciones que ya has resuelto)
- $y = x/(1 - ax)$ (*Pista*: También es producto de funciones ya resueltas)
- $y = x/(1 + ax)$ (*Nota*: ¡Esta es más difícil que las anteriores!)

7) Demuestra que si $y = u/v$ (un *cociente* de dos funciones) entonces

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{v^2}\left(v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right).$$

8) Ahora inventa tú tus propias funciones, y encuentra sus derivadas.

9) En un punto de la gráfica de una función donde $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$, esta ha alcanzado un denominado **punto crítico** (donde la pendiente es 0). Además, estos puntos pueden ser de varios tipos: si al aumentar la x la pendiente de la función *decrece* (y por tanto el valor de $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ es *negativo*), entonces decimos que el punto (x,y) es un *máximo*; si por el contrario, a medida que aumenta la x *también* lo hace la pendiente (y $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ es positivo), este punto será un *mínimo*. En resumen,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \text{ y } \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \text{ negativo}, \qquad y = \text{ máximo ;}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \text{ y } \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \text{ positivo}, \qquad y = \text{ mínimo }.$$

Un ejemplo sencillo de una curva que contiene tanto un máximo como un mínimo es la de la función $y = x(x-3)^2$. La función y sus dos primeras derivadas son:

$$y = x(x-3)^2 = x^3 - 6x^2 + 9x,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 - 12x + 9, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 6x - 12.$$

Ahora comprueba lo siguiente:

- $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ cuando $x = 1$ o $x = 3$
- y tiene un máximo en $x = 1$
- y tiene un mínimo en $x = 3$
- Cuando $x = 2$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \neq 0$, pero $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 0$.

En el último caso, el punto que corresponde a $x = 2$ es un **punto de inflexión**: dibuja la gráfica de la función para descubrir por tí mismo qué significa.

10) Obtén la primera, segunda y tercera derivadas de la función

$$y = f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$$

y comprueba que tiene puntos con pendiente nula en $x = 0$ y $x = 1$. ¿De qué tipo son?.

11) Representa la función $y = x^2 e^{-ax^2}$ (a = constante) para valores positivos de x y obtén su primera y segunda derivada. (Puedes ojear el siguiente capítulo, para usar de (3.24) que $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)e^x = e^x$. El resto se puede hacer mediante lo visto en la Sección 2.4. Después, halla el valor de x para el cual la función alcanza un máximo. ¿Que ocurrirá a la posición y altura de este máximo si duplicamos el valor de la constante a?

12) Encuentra la primera y segunda derivada de las funciones

$$y_1 = (1 + x^2)^{-2}, \qquad y_2 = \exp(-x)/(2 - x^2)$$

y luego las de su producto $y = f(x) = y_1 y_2$.
Representa la gráfica de la función $y = f(x)$ y busca máximos y mínimos en el intervalo que va desde $x = 0$ a $x = 2$.

Capítulo 3

Algunas derivadas e integrales comunes

3.1. La derivada de funciones del tipo $y = f(x) = x^n$

Esta es la función más simple de todas las que podamos querer integrar o derivar. En la Sección 2.2 ya hemos visto dos ejemplos de ella, con $n = 1$ y $n = 2$; pero ahora vamos a estudiar un caso más general, cuando n sea *cualquier* entero positivo. Después trataremos de extrapolar estos resultados para valores de n no enteros e incluso negativos.

El método que usaremos será el mismo; comenzamos desde la definición de la Sección 2.3 (ecuación 2.9). $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ es el límite cuando $x \to 0$ de la fracción

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = \frac{(x+\delta x)^n - x^n}{\delta x}.$$

La primera cosa que necesitamos es una expresión aplicable a cualquier potencia positiva de $(x+\delta x)$: esto puede escribirse $(a+b)^n$, donde $a = x, b = \delta x$, y queremos *expandir* este binomio escribiéndolo de la siguiente forma

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)(a+b)...\ (a+b) \qquad (n \text{ terminos}) \tag{3.1}$$

y multiplicando. Para $n = 2$ conocemos la respuesta: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, pero, ¿cómo obtenemos la respuesta para cualquier valor del entero positivo n?

Claramente, habrá siempre un único término a^n, el cual hemos obtenido multiplicando la a de todos los paréntesis entre sí; y habrá un término b^n, que obtendremos igual que el anterior, pero multiplicando las b en lugar de las a. Así que $(a+b)^n = a^n + \ ..... \ + b^n$, donde todos los términos de en medio incluirán una mezcla de as y bs. Para obtener estos términos que faltan, debemos pensar en ellos uno por uno. Por ejemplo, habrá muchos términos que sólo tendrán una b multiplicada por $(n-1)$ as, y que nos darán resultados como $baaa$ ... a, $abaa$ ...a, etc.; pero como el orden de los factores no importa, estos n términos tendrán el mismo valor $a^{n-1}b$ – y en conjunto sumarán $n \times a^{n-1}b$, lo que escribiremos como segundo término en la expansión (3.1).

Para obtener el tercer término, tomaremos *dos* bs, con lo que formaremos $bbaa$ ... a, $baba$ ... a, $baab$ ... a, etc., donde siempre hay una b (del primer factor de (3.1)) en el primer lugar, y la segunda b varía desde el segundo al último factor. Y como hemos tomado la primera b sólo del primer factor de (3.1) habrá otros $n-1$ factores, de los cuales podamos obtener otra b; así pues, como podemos sacar la primera b de *cualquiera* de los n factores (no sólamente el primero), parece que el siguiente término de la expansión será $n(n-1)a^{n-2}b^2$ – con $n-2$ as y 2 bs. ¡Pero espera un momento! Cuando sacamos una b y otra b de cualesquiera dos factores, no importa a cuál hayamos llamado 'primera' y a cual 'segunda' – sólo nos dan un término. Así que el número que hemos contado se tiene que dividir entre 2.

Con ello, ya podemos escribir los tres primeros términos de la expansión de (3.1):

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ .... \qquad (3.2)$$

y eso es todo lo que necesitamos. La expansión completa, por cierto, se denomina **expansión binomial**, donde 'binomial' significa que hay dos términos en la función $a+b$ cuya potencia $n$ésima estemo expandiendo.

Ahora, derivar $y = f(x) = x^n$ es sencillo. El incremento de $f(x)$ producido cuando $x \to x + \delta x$ es equivalente a aplicar (3.2) con $a = x$ y $b = \delta c$:

$$\begin{aligned} \delta y &= f(x+\delta x) - f(x) \\ &= (x+\delta x)^n - x^n \\ &= x^n + nx^{n-1}\delta x + \tfrac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}\delta x^2 + \ ... \ - x^n. \end{aligned}$$

El cociente $(\delta y/\delta x)$ de (2.9) nos quedaría

$$\frac{\delta y}{\delta x} = nx^{n-1} + \tfrac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}\delta x + \ ...$$

y en el límite, cuando $\delta x \to 0$, el último término se convierte en cero, así que

$$y = x^n : \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = nx^{n-1}. \qquad (3.3)$$

Y este es el resultado que buscábamos: nos da la derivada de x^n para cualquier valor de n, siempre que este sea un entero positivo.

Pero, ¿qué ocurre si n *no* es un entero positivo? Por ejemplo, si queremos derivar la función $f(x) = 1/x$ esto nos dará x^n con $n = -1$. En este caso podremos usar las reglas de 'construcción' de la Sección 2.4 para a partir de lo que conocemos, la derivada de x^n, llegar a la derivada que no conocemos, x^{-n}. El método para calcular un producto de dos funciones, u y v, es

$$\frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}x} = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

y si tomamos $u = x^n$ (aquello cuya derivada conocemos), con $v = u^{-1}$, entonces $uv = 1$ – una *constante*, cuya derivada ha de ser cero. En este caso, la última ecuación nos quedaría $0 = u \times (\mathrm{d}v/\mathrm{d}x) + v \times (\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)$, o $(\mathrm{d}v/\mathrm{d}x) = -u^{-2}(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)$; así que podemos reagrupar los términos para obtener (recuerda las reglas para manipular potencias, del Manual 1, Sección 4.2)

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -x^{-2n} \times (nx^{n-1}) = -nx^{-n-1}.$$

En otras palabras, para derivar una potencia negativa de x, x^{-n} (donde n es un entero positivo) simplemente multiplicamos por el exponente $-n$ y reducimos la potencia de x en 1 unidad. Esta es exactamente la misma regla que obtuvimos en (3.3) salvo por que se cumple para enteros negativos $-n$. En el Manual 1, comenzamos contando – c con lo que surgían los enteros positivos – y después definimos los enteros negativos y el cero, de manera que pudiésemos aplicar en ellos las mismas reglas; y más tarde, continuamos hablando de los números racionales, obtenidos como fracciones de la forma p/q (p, q enteros); y finalmente hablamos de *todos* los números reales. Ahora estmos siguiendo el mismo proceso de generalización; y estamos descubriendo que las mismas normas se pueden aplicar para derivar potencias tanto positivas como negativas. El siguiente paso lógico es mostrar que también se puede aplicar la misma norma, incluso cuando n no sea un entero, sino una fracción $n = p/q$. Trata por tu cuenta de demostrar que la regla (3.3) sigue siendo cierta en este caso. Con ello, serás capaz de derivar funciones como $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. El paso final sería el de probar que la misma regla se cumple para todos los reales; esto es más complicado, pero más adelante lo demostraremos.

3.2. La integral de funciones del tipo $y = f(x) = x^n$

En el último capítulo, vimos que el proceso de obtención de una nueva función mediante la derivación podía invertirse: derivar $f(x)$ significa, hablando en términos de la gráfica $y = f(x)$, encontrar la *pendiente* de la curva en cualquier punto (x, y); integrar $f(x)$ significa encontrar una nueva función $F(x)$ tal que la pendiente de $F(x)$ sea igual a la función original $f(x)$. Si usamos la notación $F'(x) = \mathrm{d}F/\mathrm{d}x$ el problema de la integración consiste en encontrar $F(x)$, sabiendo que $F'(x) = f(x)$, donde $f(x)$ es la función dada. El resultado se escribe $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$.

Para funciones simples como $y = x^n$ podemos obtener la integral 'a ojo', invirtiendo la regla (3.3): en lugar de multiplicar la función por n (el exponente) y después reducir el valor de n en 1, *incrementamos* el valor de n en 1 y después *dividimos* el resultado entre el (nuevo) exponente. ¿Por qué debemos cambiar n primero y después usarla para la división? Es sentido común: los calcetines se ponen antes de los zapatos, así que, luego ¡debes quitarte los zapatos antes de quitarte los calcetines! La operación de quitarte algo es la **inversa** de ponértelo; así que para obtener la inversa de realizar ambas operaciones seguidas, debes cambiar el orden en que haces sus operaciones inversas. (Ya nos encontramos con esta idea en el Manual 1 Sección 6.1, donde hablábamos de operaciones de simetría.) Por ello, (siempre que $n \neq -1$)

$$\text{Dada } y = x^n = F'(x): \text{ entonces } F(x) = (n+1)^{-1}x^{n+1}, \tag{3.4}$$

lo que puedes comprobar que es cierto haciendo las operaciones a la inversa, en orden contrario, sobre $F(x)$; reduce el $n+1$ en el exponente a n y *multiplíca* lo que obtengas por $n+1$ – con lo que obtendrás x^n, que es la función dada, $f(x)$. Pero, ¿por qué hemos dicho que $(n \neq -1)$ para poder aplicar la expresión (3.4)? Porque, en ese caso especial, la regla no funciona: para $n = -1$ la función $F'(x)$ es $f(x) = 1/x$, la cual dibujamos en la Fig.3 y nos dio una hipérbola. La integral $F(x)$ mediante este método nos daría $F(x) = x^0/0$, lo cual es infinito para *cualquier* valor de x y por lo tanto ni siquiera define una función de x. Volveremos con este caso especial en la Sección 3.4.

Por el momento, podemos resumir lo que hemos visto usando A con el significado de "multiplica la función por el número del exponente" y B, "reduce el exponente en una unidad". Si llamamos al resultado D, entonces $\mathsf{D}x^n = \mathsf{BA}x^n$ describe la operación A *seguido de* B – con estos operadores trabajando siempre sobre la función a su *derecha*. Es decir,

$$\mathsf{D}(x^n) = \mathsf{BA}(x^n) = \mathsf{B}(nx^n) = nx^{n-1}$$

(donde A^{-1} significa "*divide* entre el exponente" y B^{-1} significa "aumenta el exponente en 1"), y la operación inversa es

$$\mathsf{D}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{B}^{-1}(x^n) = \mathsf{A}^{-1}(x^{n+1}) = (n+1)^{-1}x^{n+1}a.$$

De esta manera, todo funciona como debería: puedes obtener la integral o bien invirtiendo la regla de derivación (siempre y cuando tengas una) mediante palabras, o bien puedes hacer lo mismo con símbolos o letras. El símbolo D, para derivar (aplicando $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$), y D^{-1}, para integrar (lo que también se denota como $\int$), ya los usamos en la ecuación (2.11) y suelen ser muy útiles. Fueron usados por primera vez hace mucho tiempo por el matemático alemán Leibnitz (1646-1716), que fue el rival de Newton en el desarrollo del Cálculo, y son muy utilizados en la actualidad en la física, especialmente.

3.3. Las funciones trigonométricas o 'circulares'

En algunas ocasiones, la variable independiente x será un ángulo, y la y nos vendrá dada por una función $f(x)$ tal como $\sin x$, $\cos x$, o $\tan x$, que hacen referencia a los lados de un triángulo. Para no liarnos, en estos casos usaremos (por ahora) θ en lugar de x como el nombre del ángulo. Si r es la longitud de una línea OP que va desde el origen de coordenadas al punto $\mathrm{P}(x, y)$, y que forma un ángulo θ con el eje X, entonces $\tan\theta = y/x$ es la pendiente de esta línea, mientras que $\sin\theta = y/r$ y $\cos\theta = x/r$. Las funciones de este tipo son las llamadas **trigonométricas** (usadas para describir los ángulos de un triángulo – *gonos* es la palabra griega para 'ángulo'). Las tres funciones están relacionadas de la siguiente manera:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{y}{r}\left(\frac{x}{r}\right)^{-1} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{3.5}$$

por lo que sólo necesitamos estudiar $\sin\theta$ y $\cos\theta$. Otra relación útil es

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \tag{3.6}$$

la cual es fácilmente demostrable a partir de las definiciones. (Fíjate en que, por ejemplo, $(\sin\theta)^2$ se suele escribir como $\sin^2\theta$, a lo que verbalmente llamamos "seno al cuadrado de θ''.)

Vimos por primera vez las funciones del seno y coseno en el Manual 1 (Capítulo 4), donde las expresamos mediante **series**. Volviendo a los nombres habituales (x, y) de las variables independiente y dependiente, podemos ver los primeros términos de estas series en (1.6). A pesar de que ambas series son infinitas, sabemos por (2.16) que la derivada de una suma es la suma de sus derivadas; así que podemos derivar término por término estas series para poder encontrar, usando (3.3) para potencias de x,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = 1 - \frac{3x^2}{3{,}2{,}1} + \frac{5x^4}{5{,}4{,}3{,}2{,}1} + \ ... \ = 1 - \frac{x^2}{2{,}1} + \frac{x^4}{4{,}3{,}2{,}1} + \ ...$$

y en el mismo modo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = 0 - \frac{2x}{2{,}1} + \frac{4x^3}{4{,}3{,}2{,}1} + \ ... \ = -x + \frac{x^3}{3{,}2{,}1} + \ ... \ .$$

Y no es difícil ver, a partir de los resultados anteriores, que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x. \tag{3.7}$$

Ahora, para obtener la derivada de $\tan x$ podemos usar las reglas de la Sección 2.4, usando que $\tan x = \sin x / \cos x$.

Tomemos $y = uv$, con $u = \sin x,\ v = (\cos x)^{-1}$. Ahora, aplicando (2.18),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \sin x \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + (\cos x)^{-1}(\cos x) = \sin x \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + 1, \tag{3.8}$$

Y lo único que queda es conocer la derivada de $v = (\cos x)^{-1}$, que es una 'función de función' y puede ser estudiada usando (2.19). Si por un momento llamamos al $\cos x$ por la letra w, podemos decir

$$v = w^{-1}, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}.$$

Y sabemos que $\mathrm{d}w/\mathrm{d}x = -\sin x$, del segundo resultado de (3.7), y que la norma (3.3) se cumple también para n *negativa*; así que tenemos todo lo que necesitamos.

Así, si aplicamos (3.3) para $n = -1$ y con las variables w, v en vez de x, y, entonces$\mathrm{d}v/\mathrm{d}w = (-1)w^{-2}$; y, a partir de esto,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}w} \times \frac{\mathrm{d}w}{rmdx} = \frac{\sin x}{(\cos x)^2}.$$

¡Ya estamos casi al final! Sustituyéndolo en (3.8) finalmente obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} + 1 = \frac{(\sin x)^2 + (\cos x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2},$$

– lo que muchas veces se escribe

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \sec^2 x \quad (\sec x = 1/\cos x). \tag{3.9}$$

(El nombre "secante" ('sec', para abreviar) es un término usado en geometría, y lo único que necesitamos saber es que es el recíproco del coseno. Las funciones recíprocas de $\sin x, \cos x, \tan x$ son, respectivamente, $\operatorname{cosec} x, \sec x), \cot x$. Esto es bueno saberlo, pero la verdad es que no se utilizan demasiado.)

Sólo por exhaustividad, añadimos aquí el resultado de la 'cotangente' $\cot x$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot x = -\operatorname{cosec}^2 x \quad (\operatorname{cosec} x = 1/\sin x), \tag{3.10}$$

que se puede hallar por el mismo método que la $\tan x$.

A partir de las fórmulas de estas derivadas, es muy fácil obtener las integrales correspondientes, dándoles la vuelta. Esto es, usandio $F'(x)$ para denotar a la función obtenida derivando $F(x)$, suponemos que el resultado $F'(x) = f(x)$ es conocido, y podemos por tanto decir que,

$$f(x) = \mathsf{D}F(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x),\ F(x) = \mathsf{D}^{-1}f(x) = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Si tomamos $F(x) = \cos(x)$, entonces sabemos, por (3.7), que $\mathsf{D}\cos(x) = \sin(x)$ y por lo tanto $\cos(x) = \mathsf{D}^{-1}\sin(x) = \int \sin(x)\mathrm{d}x$; y lo mismo ocurre para el seno.

Para resumir:

$$\text{Dado } \cos x = F'(x): \text{ entonces } F(x) = \sin x = \int \cos x\mathrm{d}x, \tag{3.11}$$

$$\text{Dado } \sin x = F'(x): \text{ entonces } F(x) = -\cos x = \int \sin x\mathrm{d}x, \tag{3.12}$$

$$\text{Dado } \sec^2 x = F'(x): \text{ entonces } F(x) = \tan x = \int \sec^2 x\mathrm{d}x. \tag{3.13}$$

y, finalmente,

$$\begin{aligned} \text{Dado } \operatorname{cosec}^2 x &= F'(x): \\ \text{entonces } F(x) &= -\cot x = \int \operatorname{cosec}^2 x\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.14}$$

3.4. La exponencial y las funciones logarítmicas

En el Manual 1, Sección 5.1, hablamos sobre el número e, al que definimos como el **límite** de una **serie**. La función $y = e^x$ es la suma de los términos $x^n/n!$, que comienzan en $n = 0$:

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... \ = f(x), \tag{3.15}$$

con un número infinito de términos. El resultado de esta suma depende del valor dado a x y aquí lo hemos llamado $f(x)$, ya que, como decimos, es una función de la variable independiente x.

En el Manual 2 volvimos a hablar de esta función, así como de alguna de sus increíbles propiedades. Recordémoslas: si multiplicas dos de estas series, tomando para cada una un valor distinto de x – $x = p$ en una y $x = q$ en la otra – resulta que

$$\begin{aligned} f(p)f(q) &= \left(1 + p + \frac{p^2}{2!} + ...\right)\left(1 + q + \frac{q^2}{2!} + ...\right) \\ &= 1 + (p+q) + \left(\frac{p^2}{2!} + pq + \frac{q^2}{2!}\right) + ... \\ &= 1 + (p+q) + \frac{(p+q)^2}{2!} + ... \ , \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde por razones de conveniencia y espacio, hemos mostrado los términos hasta el 'segundo grado'. El resultado parece ser la misma función (3.15), pero con una nueva variable $x = p + q$. Si continuamos, siempre agrupando los productos del mismo grado, sacaremos que los siguientes términos son

$$(p+q)^3/3! = (p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3)/3! \quad \text{(3er grado)}$$

y

$$(p+q)^4/4! = (p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4)/4! \quad \text{(4 grado.)}$$

Como puedes imaginar, si calculamos más términos, obtendremos el resultado

$$f(p)f(q) = 1 + (p+q) + \frac{(p+q)^2}{2!} + \frac{(p+q)^3}{3!} + ... \ = f(p+q). \tag{3.17}$$

Pero demostrar este resultado de manera general es bastante difícil: tienes que estudiar todos los métodos posibles de obtener productos de grado $n$ésimo (n factores cada vez) y después demostrar que lo que obtengas pueda escribirse de la forma $(p+q)^n/n!$.Así que de momento aceptaremos (3.17) como una propiedad básica de la función definida en (3.15): la que, por cierto, denominamos **función exponencial** y solemos escribir como "$\exp x$".

A partir de (3.17) vemos que si tomamos $p = q = x$, entonces $f(x)^2 = f(2x)$; y repitiendo el mismo proceso, $f(x)^3 = f(x) \times f(2x) = f(3x)$. Con ello,

$$f(x)^n = f(nx). \tag{3.18}$$

Esta es la segunda propiedad básica, que nos permite *definir* la potencia $n$ésima de un número incluso cuando *n no sea un entero*; sólo depende de la serie (3.15) y se cumple para cualquier valor de n (incluso irracional o complejo). Y, lo que resulta más increíble, (3.17) y (3.18) se cumplen para cualquier cosa que los símbolos (x, p, q) representen – siempre y cuando satisfaga la leyes habituales de combinación, incluyendo $qp = pq$ (que el orden de los factores no altera su producto (3.17)).

En el Manual 1, Sección 1.7, llamamos e al número (irracional) que obtuvimos de (3.15) para $x = 1$:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ \dots \quad = 2{,}718281828\dots \tag{3.19}$$

y esto nos da una *base* 'natural' para definir todos los números reales.

De (3.18) teníamos que $e^n = f(n)$ es cierto para todo n – no sólo para números enteros, sino de *cualquier* tipo. Así que si cambiamos n por x obtenemos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\ , \tag{3.20}$$

que es de nuevo la función $f(x) = \exp(x)$ de la que partimos; pero ahora podemos considerarla como una *potencia* del número e. Cualquier número y puede ser escrito como e elevado a x; $y = e^x$ donde e es la base y x el **exponente**. Las 'leyes de los exponentes', que vimos en el Manual 1 Capítulo 4 – que en ese momento demostramos sólo para exponentes enteros – ahora pueden ser reescritas en una forma más general como

$$e^x e^y = e^{x+y}, \qquad (e^x)^y = e^{xy}. \tag{3.21}$$

(Fíjate en que la otra notación, $e^x = \exp(x)$ es conveniente cuando x sea una expresión demasiado grande como para ser escrita como exponente; y (3.21) puede escribirse perfectamente como $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$ etc.)

Pero bueno, ¡volvamos al cálculo diferencial! Aquéllo que dota a la función exponencial de todas sus increíbles propiedades es algo muy simple: si dibujamos la gráfica de $y = e^x$ (Fig.4 Sección 1.3), y dibujásemos la tangente a la curva en cada punto (x, y), veríamos que la pendiente en cada punto es exactamente igual al valor de y. En forma de ecuación,

$$y = \exp x : \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y = \exp x. \tag{3.22}$$

Esto es una **ecuación diferencial** – generalmente, una relación entre una función y sus derivadas – y esta es la más simple que te puedas imaginar. Podemos encontrar otros ejemplos de ecuaciones diferenciales en cualquier campo de la ciencia – y por tanto, en otros Manuales de esta serie. Incluso en este mismo Manual, en la Sección 1.4, mencionamos que la función exponencial describe el crecimiento de una población: el número de personas (N) en una ciudad, o país, aumenta con una tasa proporcional a este número – lo que implica que $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t = cN$, donde c es un constante de proporcionalidad.

Para comprobar que la función exponencial realmente cumple la propiedad (3.22) es suficiente con utilizar la definición (3.15), derivando término a término:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ ...\right) \\
&= \left(0 + 1 + \frac{2x}{2{,}1} + \frac{3x^2}{3{,}2{,}1} + \ ...\right) \\
&= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ ...\right) \\
&= \exp x = y.
\end{aligned}$$

En algunos libros comienzan a partir de la ecuación diferencial, y culminan con la serie (3.15) como solución; pero sea cual sea la manera en que la definamos, lo important es que $\exp x$ es una función particularmente importante.

Para obtener la integral de $\exp x$, realizamos el mismo proceso que antes, invirtiendo la regla para obtener la derivada (como en (3.11), por ejemplo). Por lo tanto,

$$\text{Dada } \exp x = F'(x) : \text{ entonces } F(x) = \exp x = \int \exp x \mathrm{d}x. \tag{3.23}$$

La función logarítmica

Esta función ya la conocimos anteriormente, en la ecuación (1.8), como la inversa de $\exp x$, y repetiremos aquí su definición:

$$\text{Dada} \quad y = \exp x \quad \text{entonces} \quad x = \log y. \tag{3.24}$$

En la Fig.7 podemos ver la gráfica de esta función, con los valores de X en el eje vertical, y los de Y en el horizontal. Si usamos la convención normal, de representar la y hacia arriba (como variable dependiente) y la x de izquierda a derecha (como variable independiente), entonces la definición de la **función logarítmica** nos queda (intercambiando las variables de la anterior ecuación)

$$\text{Dada} \quad x = \exp y \quad \text{entonces} \quad y = \log x. \tag{3.25}$$

Ahora, existe una propiedad simple, pero importante, que relaciona la derivada de una función con la derivada de su inversa: si consideras y como función de x, entonces la derivada $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ es el valor en el límite de $\delta y/\delta x$; pero, si es la x la que consideras como función de y, la derivada $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y$ es ahora el límite de $\delta x/\delta y$. El producto de ambas funciones es la *unidad*, por pequeños que sean δx y δy; así que en el límite,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{-1}. \tag{3.26}$$

Ahora, si volvemos a la (3.25), donde $x = \exp y$ requiere

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \exp y = x,$$

y usamos (3.26) sigue que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}. \tag{3.27}$$

En resumen, hemos hallado la función $y = \log x$ cuya derivada es x^n con $n = -1$. Este es el 'caso especial' en el cual la regla de derivación de $f(x) = x^n$ no podía ser usada para obtener la integral $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$. Así que el misterio queda resuelto:

$$\text{Dada } y = f(x) = x^{-1} : \text{ entonces } F(x) = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \log(x). \tag{3.28}$$

Este es el último de los resultados 'estándar'que nos propusimos encontrar. Puede resultar extraño que no hayamos encontrado una bonita serie para $\log x$, algo como con la que utilizamos para $\exp x$. En su lugar, hemos definido la función como una integral, que no es fácil de evaluar mediante aritmética simple. La verdadera razón de esto es que la función que estamos integrando, $y = x^{-1}$, describe una hipérbola como la mostrada en la Fig.3; está dividida en dos ramas, separadas por una *singularidad* en $x = 0$ donde la función y sus derivadas toman valores infinitos. No es posible encontrar una serie equivalente $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ ...$, sean cuales sean los coeficientes $a, b, c, ...$ porque en $x = 0$ la función 'se dispara'. Esto es una prueba de lo cuidadosos que hemos de ser en las matemáticas si no queremos encontrarnos sorpresas desagradables. Siempre es una buena idea dibujar las funciones con las que estamos trabajando, para *ver* cómo se comportan.

Una anotación sobre el cambio de variable

Ahora tenemos una pequeña lista de funciones estándar, cuyas derivadas e integrales pueden ser consideradas como 'conocidas'. Pero la lista se puede extender de manera considerable usando las reglas de la Sección 2.4. Verás muchos ejemplos en los ejercicios. Aquí vamos a hacer uno para mostrar que no es difícil.

Buscamos la derivada de $y = \exp(ax)$ donde $a \neq 1$. Podemos pensar en ax como una nueva variable, poniendo $ax = t$ e $y = \exp(t)$. La regla para derivar la función de una función nos da

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a\exp(t) = a\exp(ax)$$

– tan fácil que, con un poco de práctica, ¡lo puedes hacer de cabeza! Haz esto para todas las funciones que hemos visto durante el capítulo, y compruébalas luego con los resultados de una tabla que encontrarás al principio del Capítulo 4.

Ejercicios

1) Encuentra una expresión para la derivada de la función $y = x^{p/q}$, donde p/q es una función racional. (*Pista*: y es la función de una función, $y = u^p$, donde $u = x^{1/q}$)

2) Demuestra las expresiones (3.7) y (3.9), partiendo de las fórmulas vistas en el Manual 1 (final del Capítulo 4):

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a\cos b + \cos a\sin b,\\ \cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b.\end{aligned}$$

3) A partir de las expresiones (3.7) y (3.9), obtén las derivadas de las funciones $y = \sin ax$, $y = \cos ax$, e $y = \tan ax$.

4) ¿Qué forma toman las expresiones (3.11), (3.12), y (3.13) si reemplazamos la x por ax?

5) ¿Qué forma toma la ecuación (3.22) si reemplazamos la x por ax? ¿Y qué forma tomaría la (3.23)?

6) Demuestra que $\log X$ puede ser expresado como la integral *definida* (medida como el área bajo la curva limitada por 1 y X):

$$\log X = \int_1^X x^{-1} \mathrm{d}x.$$

(*Pista*: Vuelve a la ecuación (2.9), donde la función integrada era $f(x) = x$. Aquí, en su lugar, tenemos $f(x) = 1/x$ pero el significado es parecido: $f(x)\mathrm{d}x$ es el incremento en la 'función área' (aquí $\log X$) cuando el límite superior aumenta a $X + \mathrm{d}x$.) Ten en cuenta que elegir el límite inferior como $x = 1$ garantiza que $\log 1 = 0$ ($e^0 = 1$).

7) Encuentra las derivadas $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{llcl}
(a) & y & = & (x + 1/x)^2, \\
(b) & y & = & (1 + x^2)/(1 - x), \\
(c) & y & = & (1 - \cos x)/(1 + \cos x), \\
(d) & y & = & x \sin x, \\
(e) & y & = & x^2 \cos x, \\
(f) & y & = & \sqrt{1 + x}, \\
(g) & y & = & \sqrt{1 + \sin x}, \\
(h) & y & = & 1/\sqrt{1 - x}, \\
(i) & y & = & 1/\sqrt{1 - x^2},
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
(j) \quad y &= \sin x/x, \\
(k) \quad y &= x/\sin x. \\
(l) \quad y &= e^x \sin x/x, \\
(m) \quad y &= \exp(-ax^2)\sin x.
\end{aligned}
$$

8) Haz unos bocetos rápidos de algunas de las funciones usadas en el Ejercicio 7, para estudiar cómo se comportan cuando $x \to \pm\infty$. Busca también puntos críticos, discontinuidades, y otros puntos de interés.

Capítulo 4

Las integrales

4.1. El problema de la integración

Si tenemos una función cualquiera $y = f(x)$, ¿cómo podemos hallar su *integral indefinida* $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$? Todo lo que sabemos es que la *derivada* de $F(x)$ es la función dada $f(x)$. Este es el problema que abordaremos en este capítulo.

En otras palabras, pretendemos solucionar la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x) \tag{4.1}$$

– la cual denominamos **ecuación diferencial** (y con este nombre nos referimos, en general, a cualquier ecuación en la que se incluyan funciones y sus derivadas).

En el Capítulo 3, obtuvimos una serie de integrales aplicando a la inversa la regla para obtener la derivada $f'(x)$ de una función conocida $f(x)$: esta regla describe una operación *directa* sobre la función $f(x)$, que denotamos al final de la Sección 3.2 con el operador D:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \mathsf{D}f(x). \tag{4.2}$$

Luego en este caso, para hallar $F(x)$ de (4.1) necesitamos la operación *inversa*: D^{-1}, tal que:

$$F = \mathsf{D}^{-1}f(x). \tag{4.3}$$

Como vimos en el capítulo anterior, tenemos métodos sencillos para realizar la operación D en una serie de funciones *conocidas*; pero no tenemos los mismos métodos para realizar la operación inversa, D^{-1}. Lo único que podemos saber es que, si D funciona con la función $F(x)$ siguiendo la ecuación (4.1), $f(x) = \mathsf{D}F(x)$. El problema de esto es que $F(x)$ no es una función *conocida*, ¡sino que es la respuesta que buscamos! Podemos tantear esta respuesta, es decir, probar con funciones conocidas y derivarlas, y comprobar si esto nos da como resultado la función dada $f(x)$. Si lo es, hemos tenido suerte y hemos acertado; sin embargo, hay millones de otras funciones que podríamos haber probado sin éxito. Por ello, debemos buscar un método más eficaz para esta tarea.

Comenzemos elaborando una tabla con las integrales más elementales, obtenidas por el método anterior:

Función $f(x)$	Deriv. $= \mathsf{D}f(x)$	Integral $= \mathsf{D}^{-1}f(x)$
x^n $(n \neq -1)$	nx^{n-1}	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$ $(= x^{-1})$	$-x^{-2}$	$\log x$
$\log x$	$\dfrac{1}{x}$	$x \log x - x$
e^x	e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$

Tabla 1: Algunas derivadas e integrales

Anotaciones sobre la Tabla 1

El operador D y su inversa D^{-1} deben cumplir la propiedad

$$\mathsf{D}\mathsf{D}^{-1} = \mathsf{D}^{-1}\mathsf{D} = \mathsf{I}, \tag{4.4}$$

donde I es el denominado **operador identidad** que equivale a mantener las funciones intactas. Por ello, la ecuación (4.4) significa que cuando los operadores D y D^{-1} sean aplicados ambos una vez a una función consecutivamente, sin importar el orden, deben dejar a la función igual que al principio: un operador contrarresta el efecto de su inverso. Como ejercicio, el lector debería comprobar cómo se cumple esta propiedad, utilizando la Tabla 1. Para esta tarea hay que recordar que los operadores afectan siempre a la función inmediatamente a su derecha; por ejemplo, $\mathsf{AB}f(x)$ significa "opera primero con B y después aplica A al resultado". Esto es debido a una convención que tomamos en el Manual 1 (Capítulo 7); pero se ha de andar con precaución, ya que en otros libros es posible que se utilice la convención inversa.

Para comenzar el ejercicio, toma la primera línea de la tabla, en la que se opera sobre $f(x) = x^n, \quad (n \neq -1)$. Primero evaluaremos $\mathsf{DD}^{-1}f(x)$:

$$\begin{aligned} \mathsf{DD}^{-1}f(x) &= \mathsf{D}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1}(n+1)x^{n+1-1} = x^n = f(x) \end{aligned}$$

Donde tras la primera operación la n queda sustituida por $(n+1)$ – siguiendo el resultado de la tercera columna. Y ahora evaluaremos las operaciones en orden inverso:

$$\begin{aligned} \mathsf{D}^{-1}\mathsf{D}f(x) &= \mathsf{D}^{-1}\left(nx^{n-1}\right) \\ &= n\left(\frac{x^{n-1+1}}{n-1+1}\right) = x^n = f(x) \end{aligned}$$

En este caso, tras la primera operación se utiliza $n-1$ (por la segunda columna) en lugar de n. En ambos casos, los multiplicandos numéricos nos son alterados por los operadores y pueden ser desplazados hacia la izquierda.

Una última, pero importante, aclaración. Mediante la *integración*, pasamos de una función original (primera columna) a una nueva función (tercera columna) que denominamos 'integral *indefinida*'. A ésta última podemos sumarle o restarle cualquier constante C sin ningún problema. Esto ocurre porque la integral indefinida es cualquier función que cumpla la ecuación (4.1); y si variamos $F(x)$ a $F(x) + C$, sigue satisfaciendo esta ecuación, ya que $dC/dx = 0$ para cualquier constante. Por ello, aunque no se incluya el término $+C$ en tablas de integrales, se ha de sobreentender que es así. Otra aclaración importante es que si sólo queremos una tabla de integrales, entonces sólo nos interesan las entradas de la columna 1, es decir, los *integrandos* – aquello que queremos integrar – y sus correspondientes entradas en la columna 3 – las soluciones de cada integral. (Como ya sabemos *derivar* cualquier función, en posteriores tablas se omitirán columnas como la 2 de esta tabla.)

Funciones inversas

En la Sección 3.3 hallamos las derivadas de las funciones trigonométricas $\sin x, \cos x$, y $\tan x, \cot x$. Podemos añadir más filas a la Tabla 1 incluyendo, además de estas funciones, sus *inversas*: $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x$, y $\cot^{-1} x$. El concepto de 'inversa'de una función fue introducido en el Capítulo 1 (Sección 1.4); lo que acabamos de hacer es escribir la inversa de una función $f(x)$ como $f^{-1}(x)$, en lugar de dándole un nuevo nombre, como g(x). En palabras, damos la vuelta a la relación $y = \sin x$ de tal manera que $x = \sin^{-1} y$ signifique "x es el ángulo cuyo seno es y" y lo mismo para las otras funciones.

Sin embargo, para evitar confusiones con las *potencias* de exponente -1, se suelen utilizar otros nombres: por ejemplo "arcoseno"x en vez de $\sin^{-1} x$, pero por el momento nosotros continuaremos con la notación de "-1", para no olvidar en ningún momento que estamos hablando de funciones inversas. Por último, se ha de recordar que cuando x es usado como variable de una función trigonométrica, se mide en *radianes*: una vuelta completa son exactamente 2π radianes, donde $\pi \approx 3{,}14159$. (Si no recuerdas algo sobre ángulos, echa un ojo al Manual 2.)

Es fácil derivar las funciones inversas utilizando la regla vista en (3.26): si tenemos una función $y = f(x)$ y queremos expresar x como función de y, escribimos $x = f^{-1}(y)$, y por tanto

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{-1}. \tag{4.5}$$

Con ello, tomando $y = \sin x$ y $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x) = \cos x$, tenemos $x = \sin^{-1} y$ y $(\mathrm{d}x/\mathrm{d}y) = 1/(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x) = 1/\cos x$.

Pero, ¿Es este el resultado que realmente buscamos? Siempre hemos utilizado x para la variable independiente (dibujada sobre el eje horizontal) e y para la variable dependiente (dibujada verticalmente); así que para mantener esta convención, debemos intercambiar x por y. Para la función inversa $y = \sin^{-1} x$ debemos entonces escribir

$$y = \sin^{-1} x : \qquad \mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 1/\cos y$$

– pero todavía no hemos terminado, porque el resultado para $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ debería de estar expresado en función de la variable x, y no en términos de $\cos y$. Sin embargo, $x = \sin y$ y sabemos que para *cualquier* ángulo θ se cumple que

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$; de lo que obtenemos que $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$. Y juntándolo todo:

$$y = \sin^{-1} x : \qquad \mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4.6}$$

Mediante el mismo método (¡compruébalo!) puedes encontrar también las siguientes derivadas:

$$y = \cos^{-1} x : \qquad \mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{4.7}$$

$$y = \tan^{-1} x : \qquad \mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \frac{1}{1+x^2}, \tag{4.8}$$

$$y = \cot^{-1} x : \qquad \mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{4.9}$$

A partir de estas derivadas, $\mathsf{D}F(x) = f(x)$, podemos escribir las correspondientes integrales indefinidas, $\mathsf{D}^{-1}f(x) = F(x)$, y extender la lista de la Tabla 1. Así que, con (4.6), la nueva fórmula para la integral será

$$\mathsf{D}^{-1}(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x) = \mathsf{D}^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = y = \sin^{-1} x.$$

De manera similar, con las otras fórmulas llegamos a la siguiente tabla:

Función $f(x)$	Integral $= \mathsf{D}^{-1}f(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\cos^{-1} x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$-\cot^{-1} x$

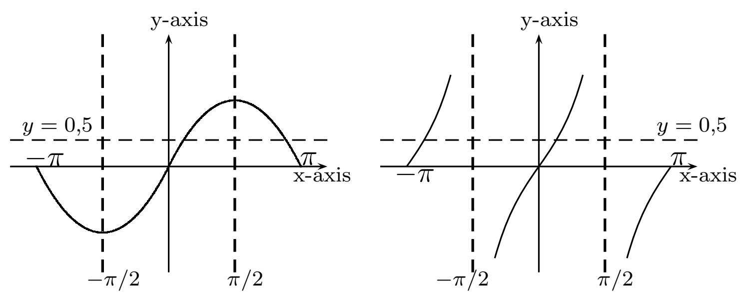
Tabla 2: Algunas integrales indefinidas más

Notas sobre la Tabla 2 (¡Sólo para las mentes más aventureras!)

Hay algo curioso en esta tabla: parece que al integrar la misma función ¡puedes obtener dos respuestas distintas! Para resolver este misterio, se ha de mirar en la forma de las funciones con las que estamos tratando. Muchas de las funciones que hemos estudiado son *inyectivas*: para cada valor de la variable independiente x sólo existe *un único* valor correspondiente de $y = f(x)$. Pero si x es un ángulo, entonces $y = \sin x$, por ejemplo, da el mismo resultado para los ángulos $x, \pi - x, 2\pi + x$, ..., etc. Esto implica que la función inversa $x = \sin^{-1} y$ (el ángulo cuyo seno es y) es una función de *múltiples valores* de la variable y, como podemos ver en la Fig.5 del Capítulo 1 (repetida aquí en la Fig.16a).

La cuestión aquí es que $y = \sin x$ es una función *periódica*, que oscila arriba y abajo indefinidamente, en ambas direcciones, mientras x avanza hasta $\pm\infty$. Si nos fijamos en la x únicamente dentro del intervalo $-\pi/2$ a $+\pi/2$ (media oscilación, ya que la entera va desde $-\pi$ a $+\pi$, como se puede observar en la Fig.16a), entonces $y = \sin x$ y su inversa $x = \sin^{-1} y$ son ambas funciones inyectivas: por ejemplo, para $x = \pi/12$ $y = \frac{1}{2}$, y este valor de y sólo se da para ese valor de x – y *viceversa* si expresamos x como función de y. Si salimos del intervalo indicado, podemos entonces encontrar infinito valores de ángulos que cumplan $y = \frac{1}{2}$.

Para asegurarnos de que obtenemos cada posible par de x, y únicamente una vez, consideramos sólo los valores de x que van desde $-\pi/2$ a $+\pi/2$.



(a) $y = \sin x$ (b) $y = \tan x$

Figura 16

La función $y = \cos x$ es también periódica y es idéntica a $y = \sin x$ si la deslizamos hacia la izquierda $\frac{1}{2}\pi$, de tal manera que su imagen comience en $y = 1$ en lugar de 0. El intervalo en el cual $y = \cos x$ recorre sus valores principales va desde $x = 0$ a $x = \pi$.

Por otro lado, las funciones $y = \tan x$ e $y = \cot x$ recorren de manera continua todos los valores desde $-\infty$ a $+\infty$, pero divididas en 'franjas', como muestra la Fig.16b. Todos los valores que toma la función tangente son idénticos a los que toma en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, pero desplazados a la izquierda o la derecha en múltiplos de π.

La franja principal de la curva de $y = \cot x$ es igual que la de $y = \tan x$, pero desplazada a la derecha $\frac{1}{2}\pi$. Y, una vez más, todos los posibles valores de $y = \cot x$ están contenidos una, y sólo una, vez en el intervalo $x = -\pi/2$ a $x = +\pi/2$.

Siempre que queramos integrar una función comenzaremos preguntándonos si ésta puede tomar la forma de alguna de las vistas en las Tablas 1 y 2; y no nos debemos preocupar si encontramos varias soluciones válidas, ya que esto puede ser válido siempre que se incluya la constante arbitraria C. Para que estas dos soluciones coincidiesen, sólo sería necesario elegir el valor de C correcto.

Hasta ahora, por lo visto en anteriores capítulos, hemos considerado la integración como la inversa de la derivación: D es el operador que nos transforma la función $f(x)$ en su derivada $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ (que recordemos que expresa la pendiente de la curva $y = f(x)$ para cualquier punto (x, y)); mientras que el operador inverso D^{-1} nos devuelve a partir de la derivada la función original, y es por ello que la operación que realiza se denomina *integración*. Concretamente, esto se denomina integración *indefinida*, ya que al resultado le podemos añadir cualquier constante C para dar una función distinta, $y = f(x) + C$, con exactamente la misma derivada, para cualquier x, ya que $y = f(x) + C$ es la misma curva que $y = f(x)$ con la única diferencia de que la primera tiene todos sus puntos a una altura C mayor que los correspondientes puntos de $f(x)$. Si no incluimos tras la integración la constante C, entonces denominamos a la integral $y = f(x)$ simplemente como **primitiva** de la función.

4.2. ¿Por qué necesitamos las integrales?

En el Capítulo 2, cuando vimos por primera vez el concepto de integración, estábamos tratando de calcular el *área* entre la gráfica de una función $y = f(x)$, el eje X, y rectas verticales ('límites de integración') en $x = x_0$ y $x = X$, como en la Fig.15; y el valor del área A dependía de donde colocábamos estos límites. Si elegimos que el límite inferior de integración sea $x = x_1$ y el superior $x = x_2$, denominaremos a este área la integral 'definida' expresada como $A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$. En particular

$$A = \int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x$$

es el área que corresponde al límite inferior $x = x_0$ y al superior con cualquier valor x que le queramos dar.

También vimos, en el final de la Sección 2.2, que si aumentamos el límite superior de una integral desde x hasta $x + \mathrm{d}x$, entonces la función del área crece según

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = f(x). \tag{4.10}$$

Ahora volvamos por un momento a nuestra definición de integración indefinida

((4.2) y (4.3)), si escribimos la función área $A(x)$ en lugar de $f(x)$, nos queda que

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = f(x) \quad \text{implica} \quad A = \mathsf{D}^{-1}f(x) = \int f(x)\mathrm{d}x \tag{4.11}$$

En otras palabras, para calcular la integral definida (el área) entre dos límites, x_1 (inferior) y x_2 (superior), primero obtenemos la función $A(x)$, invirtiendo las reglas de derivación, y después calculamos el área como

$$\int_{x_1}^{x_2} dA = A(x_2) - A(x_1) = [A(x)]_{x_1}^{x_2}, \tag{4.12}$$

donde la cantidad entre corchetes significa la resta de los valores que toma la función área cuando la x vale el límite superior y el inferior.

Ahora está claro por qué la constante arbitraria C en una integral indefinida no la incluimos cuando calculamos una integral *definida*: cuando hagas la resta aplicando (4.12), ambas constantes se anularán. Sin embargo, recuerda siempre que la función que integras debe 'comportarse' bien en el intervalo de integración (x_1, x_2); la función $f(x)$ no debe presentar discontinuidades (saltos) o singularidades (puntos en los que la función llega al infinito), ya que si no su área no estará definida.

Algunas aplicaciones prácticas

Algunas de las aplicaciones más directas del Cálculo tienen que ver con la determinación de **longitudes, áreas** y **volúmenes**, y la de sus tasas de variación con el tiempo. Por ejemplo, la distancia que recorres a lo largo de una curva que conecta dos puntos es la longitud de un camino, llamémosla s, medida desde el punto donde $s = 0$. Y tu velocidad v será la tasa de variación de s con respecto al tiempo: $v = ds/dt$, en cualquier punto en el que te encuentres. Si este camino curvo está descrito utilizando coordenadas (x, y), mediante una función $y = f(x)$ entonces tanto s como v serán funciones de la misma variable independiente x; y cuando avances por la curva, s, v y x serán todas funciones del tiempo t. Por lo que podmeos escribir (sin pensar todavía en el tiempo t)

$$y = f(x), \qquad x = g(t), \qquad s = s(x), \qquad v = v(x), \tag{4.13}$$

donde hemos utilizado f y g como nombres de las dos priemras funciones, mientras que hemos mantenido s y v para nombrar tanto las cantidades físicas como las funciones que las describen.

Esto último puede parecer confuso, pero es lo usual en las ciencias: no podemos inventar un nuevo nombre de función cada vez que queramos cambiar la variable; y de cualquier modo, escribir $s = s(x)$ implica que estamos considerando a la s como una función de x, mientras que $s = s(t)$ nos dice que s es también una función de t. El *valor* de la variable dependiente, la parte izquierda de estas igualdades, está determinado por el de la variable independiente en la derecha; y esta correspondencia uno-a-uno es lo que define una relación funcional. El doble uso de la misma letra (o símbolo) no es estrictamente correcto, pero siempre entendemos lo que significa – ¡y eso es lo importante!

Ahora desplacémonos sobre la curva mostrada en la Fig.17, comenzando en P_1, donde $x = x_1$, y terminando en P_2, donde $x = x_2$.

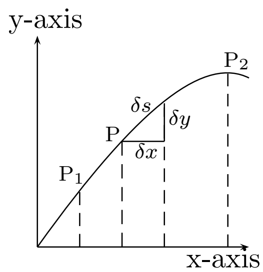


Figure 17

En un punto $\mathrm{P}(x, y)$ cualquiera de la curva, dentro de estos límites, el siguiente 'paso' te llevará hasta $(x + \delta x, y + \delta y)$ y la longitud de este paso será de $\delta s \approx \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}$, siempre y cuando los incrementos $\delta x, \delta y$ sean pequeños, como los de la figura. (Recuerda que δx es una cantidad, y que δx^2 es su cuadrado, $(\delta x)^2$, y no un aumento de x^2.)

Ahora la longitud total de camino desde P_1 hasta P_2 será la suma de todos los δs lo que escribimos de la siguiente manera: $s_{12} \approx \sum \delta s$, donde

$$\delta s \approx \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} = \sqrt{\delta x^2 \left(1 + \frac{\delta y^2}{\delta x^2}\right)}.$$

En el límite donde $\delta x, \delta y \to 0$ el cociente de la derecha se convierte en $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2$ y la suma de todos los elementos infinitesimales se convierte en la integral:

$$s_{12} \to \int_{x_1}^{x_2} \left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x. \tag{4.14}$$

Esta expresión es una integral definida entre los límites $x = x_1$ y $x = x_2$, y es perfectamente aplicable a cualquier curva en el plano.

Para ver cómo funciona esto, miremos al cuadrante de un círculo representado en la Fig.18.

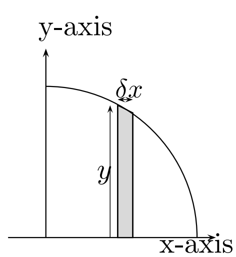


Figura 18

Aquí la ecuación de la curva es $x^2 + y^2 = a^2$ (donde a es el radio). Por tanto, tomando una raíz cuadrada positiva y derivando, obtenemos,

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Con lo que la longitud total del arco desde P_1 hasta P_2 será, aplicando (4.14),

$$s_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \left[1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mathrm{d}x. \tag{4.15}$$

Esta no es una integral directa de las de la Tabla 2, pero podemos utilizar el mismo truco que al final de la Sección 3.3 para que lo sea. Sustituyamos $x = au$, donde u es una nueva variable ($u = x/a$ o x en unidades del radio) y recordemos que $\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(x)(\mathrm{d}x/\mathrm{d}u)\mathrm{d}u$. Ya que $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u = a$ y $f(x) = f(au)$ en función de u, el último resultado puede reescribirse como

$$s_{12} = \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - a^2u^2}} a\mathrm{d}u = a \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \mathrm{d}u. \tag{4.16}$$

Esto *sí* es una integral estándar; es el $\sin^{-1} u$ entre los límites $u = 0$ y $u = 1$, que corresponden a $x = 0$ y $x = a$, los límites del cuadrante circular de la Fig.18. Aplicando en estos límites (4.16) nos queda

$$s_{12} = a(\sin^{-1} 1 - \sin^{-1} 0) = a(\pi/2 - 0) = \tfrac{1}{2}a\pi. \tag{4.17}$$

La circunferencia de un círculo completo, de radio a, es 4 veces la longitud del arco de un cuadrante, y es por tanto $2\pi a$ – como ya habíamos demostrado con argumentos geométricos en el Manual 2.

Como segunda aplicación de las integrales, calculemos el área del círculo. Tomamos el cuadrante de la Fig.18, lo dividimos en franjas verticales – donde x es la distancia de la franja al centro del círculo, y su altura, su anchura δx, y su área $y\delta x$. Si sumamos el área de todas las tiras, desde $x = 0$ hasta $x = a$ obtendremos el área de todo el cuadrante – que será aproximada, si las tiras tienen anchura finita o exacta si la calculamos con el límite $\delta x \to 0$, con un infinito número de rectangulitos. El diferencial del área será $\mathrm{d}A = y\mathrm{d}x = \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x$ y el área total será la integral definida

$$A = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x. \tag{4.18}$$

Una vez más, esta integral no es una de las de las tablas 1 y 2; y el truco usado en (4.15) no funciona esta vez (¡Compruébalo!). Volveremos a ello luego, pero por ahora dividamos de otra manera el área en partes infinitesimales: en lugar de rectangulitos, dividamos el sector circular en franjas *circulares* como las de la Fig.19. Cada franja, de anchura δr, tendrá un área $\delta A =$ (longitud de la circunferencia) $\times$ (anchura); y como acabamos de ver, la circunferencia mide 2π veces el radio, por lo que d$A = 2\pi r$dr para una tira de anchura dr y el área total se convierte en la integral definida

$$A = \int_0^a 2\pi r \mathrm{d}r = 2\pi \left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_0^a = \pi a^2, \qquad (4.19)$$

donde hemos aplicado la primera integral de la Tabla 1.

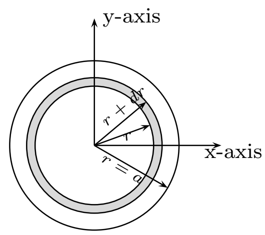
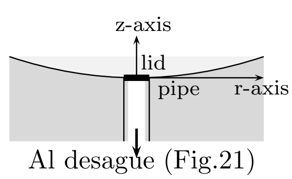


Figura 19

Así pues, si no encuentras una manera de integrar para calcular un área, prueba a buscar otro modo de obtener los diferenciales de superficie. Las coordenadas cartesianas (x, y) no son, por ejemplo, la manera más simple de representar círculos, sí en cambio un radio y un ángulo (coordenadas polares), con lo que la ecuación del círculo sería simplemente $r = a$ en lugar de $x^2 + y^2 = a^2$.

Como último ejemplo práctico, calcularemos un volumen. Es posible que alguna vez quieras saber cuánta agua cabe en una gran piscina circular, y para calcularlo necesitarás conocer su profundidad en todos sus puntos. Una vez más, es más fácil utilizar r, la distancia desde el centro como variable independiente; y si llamamos a la profundidad de la piscina z, podemos suponer que $z = f(r)$. Para obtener esta función puedes salir en un barco con un palo largo e ir sumergiéndolo, para calcular z para unos pocos valores de r. Si la piscina es profunda, puede que dos valores nos den una bastante buena aproximación: en la mitad $(r = 0)$ la profundidad puede que sea d, mientras que en el borde (por ejemplo, $r = a$) será 0. Esto puede ser descrito por una **parábola**, como la de la Fig.20.



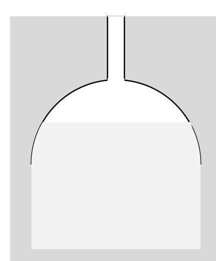


Figura 20 Figura 21

La ecuación general de una parábola tiene la forma $z = A + Br + Cr^2$, donde A, B, C son constantes, y debemos calcularlas para encajar con los datos que tenemos.

Si representamos el eje Z mirando hacia arriba, como es común, sabemos que $z = 0$ cuando $r = 0$; por lo que A debe ser cero. Y si nos alejamos del centro, la profundidad debe ser la misma en los puntos r y $-r$; por lo que B debe ser también 0. Finalmente, en el borde, $z = Cr^2$ debe dar como resultado d cuando $r = a$; así que $d = Ca^2$ y $C = d/a^2$. Por ello, la ecuación del fondo de la piscina será

$$z = f(r) = (d/a^2)r^2 \tag{4.20}$$

y ahora, por fin, podemos dedicarnos a calcular el volumen de agua que cabe en la piscina.

¿Cómo debemos elegir los diferenciales de volumen? Si pensamos en el agua como un conjunto de discos circulares paralelos a la superficie, de espesor δz y diámetro r, cada uno tendrá un volumen δz multiplicado por su superficie; y acabamos de calcular el área del superior, el disco que se encuentra a una altura z tendrá un área de πr^2. Así que los diferenciales del volumen serán $\mathrm{d}V = \pi r^2 \mathrm{d}z$, donde z varía según el diámetro del elemento, según la relación (4.20). El diferencial $\mathrm{d}z$, por otro lado, es $\mathrm{d}z = (\mathrm{d}z/\mathrm{d}r)\mathrm{d}r$; y derivándolo (4.20) nos queda $(\mathrm{d}z/\mathrm{d}r) = (d/a^2)(2r)$. El volumen por tanto depende del diámetro del disco:

$$\mathrm{d}V = \pi r^2 (d/a^2) 2r \mathrm{d}r = 2\pi(d/a^2)r^3 \mathrm{d}r. \tag{4.21}$$

Cuando la piscina esté llena, el volumen de agua que contendrá será el expresado por la integral definida

$$\begin{aligned} V &= 2\pi(d/a^2)\int_0^a r^3 \mathrm{d}r = 2\pi(d/a^2)\left[r^4/4\right]_0^a \\ &= \tfrac{1}{2}\pi(d/a^2)a^4 = \tfrac{1}{2}\pi(da^2) \end{aligned} \tag{4.22}$$

– un resultado muy bonito, por cierto.

En países muy calurosos donde no hay muchas precipitaciones, el agua es un bien preciado, y si has tenido la suerte de encontrarte un estanque lleno, el siguiente problema que te surge es el de cómo mantener ese agua – ya que si simplemente lo dejas estar, se evaporará en poco tiempo. La mejor manera de mantener el agua fresca es crear una gran cisterna subterránea, tallada en roca y con todas las posibles grietas tapadas con arcilla para que no gotee. De esta manera, puedes vaciar el agua del estanque en ella cada vez que llueva. Esta técnica lleva siendo utilizada miles de años: en Estambul, Turquía, hay enormes cisternas creadas hace dos milenios por los romanos – ¡y todavía contienen agua!

La Fig.21 muestra un ejemplo de cisterna: el agua de la piscina de la Fig.20 baja por el desague, cuando abres la tapa, y para saber cómo de grande quieres hacerla, y así saber cuántas veces podrás llenarla con el agua de la piscina, debes calcular volúmenes. Puedes hacer esto con la cisterna siempre que puedas hacer medidas para obtener al relación entre el diámetro r y la altura z sobre el fondo: una vez tengas $r = f(z)$ puedes expresar el volumen V para cualquier nivel de agua, digamos Z, como una integral definida, $\int_0^Z \mathrm{d}V$ tal y como hicimos para la piscina. ¡Piensa en ello!

4.3. Integrales 'por sustitución'

En esta sección nos vamos a dedicar a buscar maneras de obtener una integral que no esté en nuestras listas (Tablas 1 y 2) – relacionándolas con una integral que *sí* lo esté. El primer método se llama **integración por sustitución** y ya nos hemos topado antes con un simple ejemplo del mismo. Al final del Capítulo 3, había una anotación sobre hacer un "cambio de variables". Esto nos daba un método útil para integrar funciones como $f(ax+b)$, cuando únicamente sabíamos el resultado de integrar $f(x)$. Simplemente pensábamos en $ax+b$ como una nueva variable, llamándola, por ejemplo, u, y usábamos el resultado que ya conocíamos para obtener $\int f(u)\mathrm{d}u$ – que luego podíamos volver a escribir en términos de la variable original, x.

El método se basa en la ecuación (2.22) del Capítulo 2, que nos enseña cómo derivar una "función de otra función", $y = f(u)$, donde $u = u(x)$. La operación *inversa*, integrar una función de otra función, sigue de la manera habitual: ya que y se convierte también en una función de x

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

y, integrando ambos lados de esta ecuación con respecto a x, obtenemos

$$y = \int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x. \tag{4.23}$$

En esta sección veremos ejemplos de cómo usar esta regla.

- (i) $y = f(x+a) = (x+a)^n$, $a =$ constante. Sustituye $x+a$ por u y luego aplica (4.23) para obtener

$$\begin{aligned}\int (x+a)^n \mathrm{d}x &= \int u^n \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u = \int u^n \mathrm{d}u \\ &= \frac{u^{n+1}}{n+1} = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1},\end{aligned}$$

  ya que, de (4.5), $(\mathrm{d}x/\mathrm{d}u) = 1/(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x) = 1$. Así pues, en este caso simplemente usamos una de las integrales de la tabla, sustituyendo $(x+a)$ en lugar del original x. Ten en cuenta que esto puede usarse con cualquier de las funciones listadas, no sólo para x^n, porque $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$ depende únicamente de la forma de $u(x)$.

- (ii) $y = f(ax) = (ax)^n$, $a =$ constante. Ahora sustituye $ax = u$ y vuelve a aplicar (4.23):

$$\begin{aligned}\int f(ax)\mathrm{d}x &= \int f(u)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u = \int f(u)(1/a)\mathrm{d}u \\ &= (1/a)\int f(u)\mathrm{d}u = (1/a),\end{aligned}$$

ya que $(\mathrm{d}x/\mathrm{d}u) = (1/a)(\mathrm{d}u/\mathrm{d}u) = 1/a$. Así que usamos el resultado de las tablas, para $\int f(x)\mathrm{d}x$, con ax en lugar de x, pero luego dividimos por la constante a.

- (iii) $y = f(ax+b), a, b$ constantes. Sustituye $ax + b = u$ y aplica (4.23):

$$\begin{aligned} \int f(ax+b)\mathrm{d}x &= \int f(u)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u = \int f(u)(1/a)\mathrm{d}u \\ &= (1/a)\int f(u)\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

  Una vez más, usamos un resultado de las tablas, con u en lugar de x, dividiéndolo por la constante a.

- (iv) $y = \int f(u)\mathrm{d}u,\ u = u(x) = x^2$. En este caso, aplicando la (4.23) tenemos

$$\int f(u)\mathrm{d}u = \int f(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int f(x^2)(2x)\mathrm{d}x;$$

  con lo que la integral de la derecha puede ser sustituida por la de la izquierda, que puede resultar más fácil de evaluar. Este resultado es general: siempre que el integrando sea una función de una nueva variable u, multiplicado por la derivada $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$, podemos sustituir el resultado de la izquierda. Así, en este ejemplo, $\int f(x^2)(2x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u$, pero de manera general,

$$\begin{aligned} \text{Cualquier integral de la forma } I &= \int f(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\ \text{puede ser sustituida por } I &= \int f(u)\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{4.24}$$

  Un caso especial importante ocurre cuando $f(u) = 1/u$, ya que entonces

$$\int \frac{(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)}{u}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \log u. \tag{4.25}$$

  En palabras, *Siempre que el numerador de un integrando sea la derivada del denominador*, la integral será el logaritmo del denominador.

Por supuesto, no es necesario recordar todos los casos posibles, ya que es muy fácil deducirlos a partir de (4.23). Por ejemplo,

- (iv) $y = \sin ax,\ a =$ constante. Sustituyendo $ax = u$ y aplicando (4.23):

$$\begin{aligned} \int \sin(ax)\mathrm{d}x &= \int \sin u\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u = (1/a)\int \sin u\mathrm{d}u \\ &= (1/a)(-\cos u) = -(1/a)\cos(ax), \end{aligned}$$

  y finalmente

- (v) $y = \frac{1}{ax+b}$, a, b ambas constantes. Sustituyendo $ax + b = u$,

$$\int \frac{1}{ax+b}\mathrm{d}x = (1/a)\log(ax+b).$$

No siempre es fácil elegir una sustitución que simplifique las cosas: lo único que debes hacer es probar todo lo que se te ocurra que pienses que pueda funcionar. Por ejemplo, cuando intentábamos hallar el área de un cuadrante circular, usando coordenadas Cartesianas, llegamos al resultado

$$A = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x$$

pero no sabíamos cómo resolver la integral. Si pruebas $u^2 = a^2 - x^2$, para eliminar la raíz cuadrada, verás que no sirve de nada. En cambio, la sustitución $x = a\sin u$ sí es útil: nos deja, antes de comenzar la integración,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 u} = a\sqrt{1 - \sin^2 u} = a\cos u.$$

Con esta sustitución también necesitamos el factor $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$ en el integrando. Este será $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u = a\cos u$ y ahora podemos integrar fácilmente:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \int a\cos u \times a\cos u\mathrm{d}u = a^2\int \cos^2 u\mathrm{d}u,$$

lo que parece más sencillo. ¿Pero cómo lo hacemos? Debemos recordar algo del Manual 2, donde aprendimos a manejar funciones trigonométricas como $\sin x$ y $\cos x$. Aprendimos a calcular el seno y el coseno de la *suma* de dos ángulos, dados en ecuaciones (4.22) del Capítulo 5: tenían la forma $\sin A + B = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ y $\cos A + B = \cos A\cos B - \sin A\sin B$. Y ahora, sustituyendo $A = B = u$, podemos al fin integrar. Nos queda

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x &= a^2\int \cos^2 u\mathrm{d}u = a^2\int \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2u)\mathrm{d}u \\ &= \tfrac{1}{2}a^2\left[u + \sin u\cos u\right],\end{aligned}$$

donde hemos usado $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x$ de la Tabla 1 (dividiendo por la constante $a = 2$ para el ángulo doble) y $\sin 2u = 2\sin u\cos u$ (de la fórmula de arriba, de $\sin A + B$).

Todo lo que queda es poner los límites para cacular la integral definida.

En el límite inferior $x = 0, \sin u = x/a = 0$: so $[...] = 0$.

Y en el superior $x = a,\ \sin u = (x/a) = 1,\ u = \frac{1}{2}\pi$: so $[...] = [\frac{1}{2}\pi + \sin\frac{1}{2}\pi\cos\frac{1}{2}\pi] = [\frac{1}{2}\pi + 1 \times 0] = \frac{1}{2}\pi$.

Con lo cual, $A = \frac{1}{2}a^2\left[u + \sin u\cos u\right]_{u=0}^{u=\pi/2} = a^2\pi^2/4$ y el área de todo el círculo es cuatro veces esta, πa^2. Este es el mismo resultado que encontramos en (4.19), pero aquí hemos tenido que trabajar más duro para encontrarlo – porque hemos mantenido las coordenadas Cartesianas (x, y) en lugar de buscar una transformación de éstas que hiciera a la integral más fácil de evaluar.

En esta sección hemos encontrado una manera de integrar 'invirtiendo' la regla de derivación de funciones compuestas. En la próxima sección, buscaremos una regla de integración basada en el método de derivación de un *producto* de dos funciones.

4.4. Integrales 'por partes'

En esta sección vamos a partir desde la regla (2.21) para derivar el producto de dos funciones, $y(x) = u(x)v(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \tag{4.26}$$

donde u y v son dos funciones que sabemos cómo derivar. A esta expresión se le puede dar la vuelta, como de costumbre, dándonos cuenta de que

$$\text{Dada } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x), \quad \text{entonces } y = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

(Recuerda que la derivación y la integración son procesos inversos, D y D^{-1}, y que utilizar el símbolo de integral ($\int$) es sólo una notación alternativa.) La 'versión dada la vuelta' de (4.24) es

$$y = uv = \int u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \int v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \tag{4.27}$$

y, recolocando los términos,

$$\int u\frac{dv}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = uv - \int v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x. \tag{4.28}$$

Si nos percatamos de que el integrando de una integral que no conseguimos resolver tiene la forma $u(\mathrm{d}v/\mathrm{d}x)$, eligiendo nosotros, de manera conveniente, las dos funciones u, v, entonces podemos escribirla en términos de la integral del producto $v(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)$. Y si hemos hecho una correcta elección de u y v la nueva integral puede que tenga forma de una que *sí* podamos resolver.

Una vez más, no hay ninguna regla general para averiguar cómo elegir las dos funciones. La única receta es tu imaginación, y tu intuición, que se entrena con la práctica.

Veamos unos cuantos ejemplos de cómo funciona esto:

- (i) Supón que queremos resolver $I = \int x \cos x\mathrm{d}x$. Esto puede verse como la parte izquierda de (4.25) si tomamos

$$u = x, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \cos x.$$

En este caso $v = \sin x$ y (4.25) se convierte en

$$\begin{aligned}\int x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x\mathrm{d}x &= x\sin x - \int \sin x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)\mathrm{d}x \\ &= x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x \\ &= x\sin x + \cos x\end{aligned}$$

- (ii) Una integral parecida es $I = \int x\log x\mathrm{d}x$. Esto sugiere que tomemos

$$u = \log x, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 1, \quad v = x,$$

tal que (4.25) queda

$$\begin{aligned}\int \log x\mathrm{d}x &= (\log x)x - \int x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log x)\mathrm{d}x \\ &= x\log x - \int x\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\log x - x.\end{aligned}$$

(Este es el método por el que obtuvimos el resultado de la tercera fila de la Tabla 1)

- (iii) Muchas veces las integrales que queremos obtener vienen en pares. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}P &= \int e^{ax}\cos(bx)\mathrm{d}x, \\ Q &= \int e^{ax}\sin(bx)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Para calcular P, prueba tomando $\cos(bx) = u$ y $e^{ax} = \mathrm{d}v/\mathrm{d}x$, tal que $v = e^{ax}/a$. Integrando por partes obtenemos, aplicando (4.25),

$$\begin{aligned}P &= (e^{ax}/a)\cos(bx) - \int (e^{ax}/a)\times(-b\sin(\,bx)\mathrm{d}x \\ &= (e^{ax}/a)\cos(bx) + bQ/a.\end{aligned}$$

Mediante el mismo proceso (¡hazlo!) encontrarás

$$Q = (e^{ax}/a)\sin(bx) - bP/a.$$

Recolocando estos resultados, obtenemos un sistema de ecuaciones (Sección 2.3 del Manual 2):

$$aP - bQ = e^{ax}\cos\,bx, \qquad bP + aQ = e^{ax}\sin\,bx,$$

el cual puede ser resuelto fácilmente para obtener P y Q. El resultado es (compruébalo tú):

$$\begin{aligned}P &= e^{ax}(b\sin\,bx + a\cos\,bx)/(a^2+b^2), \\ Q &= e^{ax}(a\sin\,bx - b\cos\,bx)/(a^2+b^2).\end{aligned}$$

Hay muchos otros truquillos para resolver integrales que a simple vista no parezcan resolubles, pero los ejemplos vistos son suficientes de momento para continuar. En los ejercicios del final del capítulo encontrarás más integrales para practicar, con pistas para resolverlas.

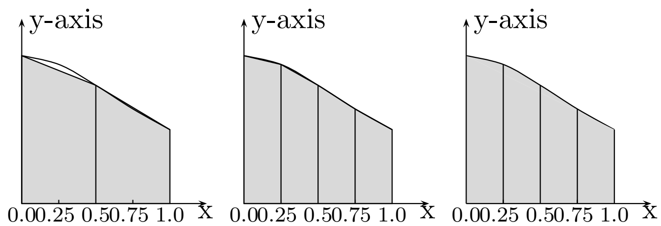
4.5. Integrales numéricas

A menudo, querremos resolver una integral definida de una función, pero no encontraremos expresión para su integral *indefinida* – con lo que no podremos sustituir los valores de x en los límites de integración y restarlos posteriormente. En estos casos, nuestra única alternativa es usar la *aritmética* para calcular el área de manera aproximada, proceso denominado **integración numérica**.

La aproximación más simple consiste en dividir, como ya hemos hecho varias veces, el área en rectangulos verticales de anchura fija, llamémosla h, desde X_1 hasta X_2 y sumar posteriormente el área de estas tiras. Calculemos el área bajo la curva de $y = f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ entre los límites $X_1 = 0$ y $X_2 = 1{,}0$, dada por la integral definida

$$A = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} \mathrm{d}x$$

En la Fig.45(a) podemos ver una aproximación muy basta, donde sólo hemos tomado tres puntos de la curva $y = f(x)$, $x_1 = X_1 = 0, x_3 = X_2 = 1{,}0$ y un punto entre ambos, $x_2 = 0{,}5$. Por ello, el área se divide en dos piezas de anchura $h = 0{,}5$.



(a) $h = 0{,}5$ (b) $h = 0{,}25$ (c) Simpson

Figura 22

Las ordenadas para estos valores de x serán, respectivamente, y_1, y_2, y_3; y el área de las piezas formadas uniendo los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), será de $\frac{1}{2}(y_1+y_2)h$ y $\frac{1}{2}(y_2+y_3)h$, respectivamente. La primera tira tendrá un área de $A_1 = \frac{1}{2}(y_1+y_2)h$ y la segunda (que en este caso es un triángulo) de $A_2 = \frac{1}{2}(y_2 + y_3)h$. Una primera aproximación del área total será, por tanto,

$$A \approx A_1 + A_2 = (\tfrac{1}{2}y_1 + y_2 + \tfrac{1}{2}y_3)h.$$

En la Fig.22(a) el ancho de cada tira es de $h = 0{,}5$ y el área total es $A \approx 1{,}55h = 0{,}7750$. (Haz tú también el cálculo)

Para obtener una mejor aproximación, podemos dividir toda el área a calcular en n tiras, de manera que la anchura de las tiras $h = 1/n$ sea cada vez menor, en lugar de $h = 1/2$.

$$A \approx (\tfrac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + \ .... \ + \tfrac{1}{2}y_{n+1})h, \tag{4.29}$$

donde sólo el primer y último valor de y tiene coeficientes $\frac{1}{2}$. Esta regla se conoce como la **regla del trapecio** porque cada tira tiene la forma geométrica de uno.

En la Fig.22(b) podemos ver el resultado de tomar $n = 4$, y por tanto $h = 1/4$, sólo la mitad de ancho que el ancho de las tiras de la Fig.22(a). Las ordenadas en $x_1 = 0$, $x_2 = h$, $x_3 = 2h$, $x_4 = 3h$, $x_5 = 4h$ (recuerda que $x = 0$ nos da la *primera* ordenada) son, respectivamente, $y_1 = 1{,}0\, y_2 = 0{,}9412$, $y_3 = 0{,}8\, y_4 = 0{,}64\, y_5 = 0{,}5$; y si repites el cálculo por tí mismo verás que da un área total aproximada de $A \approx 3{,}1312h = 0{,}7828$.

La regla del trapezoide no da resultados muy buenos ya que la parte superior de cada tira está cerrada con una recta, mientras que en la mayoría de los casos, la función original será curva. Puede dar mejores resultados usar una curva, y la más sencilla que se nos ocurre es la parábola, que se describe mediante una ecuación de segundo grado $y = A + Bx + Cx^2$ (Sección 1.2 del Manual 3). Si conocemos tres puntos de la curva, podemos elegir las constantes A, B, C de manera que la parábola pase por todos ellos. Y si hacemos esto para cada dos tiras de las usadas en la Fig.22(b), estas encajarán mucho mejor con la original. En la Fig.22(c) podemos ver el resultado de usar este método con cada dos tiras (con $h = 0{,}25$) para que la tira doble ($h = 0{,}5$), tenga tapa curvada. Las constantes están elegidas de manera que y_0, y_1, y_2 sean coordenadas de la primera tapa, y de la misma manera, y_2, y_3, y_4 definen la segunda tapa. Ahora, en lugar de las dos tiras gordas con parte superior recta, de la Fig.22(a), tenemos dos con parte superior curva.

¿Cómo nos ayuda esto a obtener una mejor aproximación del área bajo la gráfica? Pues mediante la integración de las parábolas que hemos calculado, que no es nada difícil, ya que tienen fórmulas del tipo $y = A + Bx + Cx^2$. Después, sumamos estas integrales, como hicimos en los métodos anteriores.

Vamos a hacer todo este proceso de forma detallada. Primero, imaginemos que tenemos dos tiras unidas, para las cuales definiremos variables distintas a las anteriores. Tomaremos $x = x_0$ para la ordenada central, en la unión de las dos tiras, con su correspondiente $y = y_0$. Los límites superior e inferior de integración para el conjunto de las dos piezas estarán en $x = x_0 + h$ y $x = x_0 - h$, a los que podemos llamar x_{+1} y x_{-1}, respectivamente. Para facilitar aún más las cosas, mediremos x con $x = x_0 = 0$ como origen. Las ordenadas de los tres puntos estarán por tanto en

$$x = x_{-1} = -h \qquad x_0 = 0 \qquad x_{+1} = +h$$

y tendrán como alturas

$$y = y_{-1} \qquad y_0 \qquad y_{+1}.$$

Si aplicamos en la fórmula de la parábola que $x = 0$, tendremos $y = A + B \times 0 +$

$C \times 0^2 = y_0$, por lo que la primera constante será $A = y_0$.

Ahora sustituímos $x = -h$ y nos queda $y = A - Bh + Ch^2 = y_{-1}$, mientras que con $x = +h$ obtenemos $y = A + Bh + Ch^2 = y_{+1}$. A partir de estas dos ecuaciones, elaboramos un sistema sencillo, y podemos calcularlas dos incógnitas que nos faltan, B y C.

Si restamos a la segunda ecuación la primera, los términos con A y C se anularán, con lo que queda $2Bh = y_{+1} - y{-1}$. Asq́ue $B = \frac{1}{2}(y_{+1} - y{-1})/h$.

Si en lugar de ello *sumamos* las dos ecuaciones, e introducimos en ellas el valor ya calculado de $A = y_0$, obtenemos $2y_0 + 2Ch^2 = y_{+1} + y_{-1}$. Por lo que C debe valer $C = \frac{1}{2}(y_{+1} + y_{-1} - 2y_0)/h^2$.

El siguiente paso es ya encontrar el área de la doble tira, bajo la gráfica de $y = A + Bx + Cx^2$. Esto equivale a calcular la integral definida de $\int y\mathrm{d}x$ entre $x = -h$ y $x = +h$:

$$\int_{-h}^{+h} (A + Bx + Cx^2)\mathrm{d}x = \left[Ax + \tfrac{1}{2}Bx^2 + C(x^3/3)\right]_{-h}^{+h}.$$

Cuando sustituimos los límites de integración y los restamos, nos queda

$$Ah - A(-h) + C(h^3/3) - C(-h^3/3) = 2Ah + 2Ch^3/3$$

y sustituyendo los valores de A y C nos queda (comprueba cuidadosamente este resultado...)

$$\int_{-h}^{+h} y\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\left[y_{-1} + 4y_0 + y_{+1}\right]. \tag{4.30}$$

Ahora podemos calcular el área bajo toda la curva, entre los límites x_1 y x_n (la primera y última ordenada). Primero sustituye y_1, y_2, y_3 por y_{-1}, y_0, y_{+1} en la fórmula (4.30) para calcular el área de la primera tira-doble; después haz lo mismo para la siguiente, usando y_3, y_4, y_5; y así sucesivamente hasta que obtengas la última ordenada y_n. Cuando sumes todas estas pequeñas áreas, tendrás el resultado del área total A con la forma

$$\begin{aligned} A = &[(y_1 + 4y_2 + y_3) \\ &\qquad +(y_3 + 4y_4 + y_5) \\ &\qquad\qquad +(y_5 + 4y_6 + y_7) \\ &\qquad\qquad\qquad +....]\,(h/3) \\ = &\quad [(y_1 + y_n) + 2(y_3 + y_5 + ...) + 4(y_2 + y_4 + ...)]\,(h/3) \end{aligned} \tag{4.31}$$

Este resultado es la llamada **Regla de Simpson**. Es fácil de recordar si se expresa en palabras:

> Haz la suma de la primera y última ordenada, $y_1 + y_n$. Súmale *el doble* de la suma del resto de las coordenadas impares $(y_3, y_5, ...)$. Y a todo

ello súmale *el cuádruple* del resto de coordenadas (las pares, sin contar la última en caso de que también lo fuera) $(y_4, y_6, ...)$. Finalmente, multiplica el total por $h/3$.

Este método no es difícil de usar, y da bastante buenos resultados siempre que h no sea muy grande, y el integrando se comporte “bien” dentro del rango de integración.

En la Fig.22(c) podemos ver un ejemplo del método, aplicado a la misma curva que en (a) y (b), con $h = 0{,}25$. Según la Tabla 2, la integral indefinida de $y = 1/(1+x^2)$ es $\tan^{-1} x$, función que devuelve el ángulo, en radianes, cuya tangente sea x: en el límite superior de la integral definida, $x = 1$, que es la tangente del ángulo $\pi/4$ (45 grados), mientras que en el límite inferior, $x = 0$, que es la tangente del ángulo 0. La resta de ambos es el valor de la integral definida que estamos calculando: $\pi/4$. Como $h = 1/4$, el valor aproximado de nuestra área es 3,1416/4, donde $\pi \approx 3{,}1416$. Esta aproximación a las diezmilésimas es buena. Sin embargo, si usas una calculadora, fácilmente puedes obtener un valor de $\pi \approx 3{,}141593$ utilizando diez tiras en lugar de cuatro.

Hasta ahora hemos hablado de métodos para calcular el valor de *integrales definidas* mediante métodos numéricos, pero también es posible *derivar* una función mediante procesos similares. En la Regla de Simpson, por ejemplo, la función que queremos integrar se representa, pieza por pieza, encajando su gráfica a la de polinomios $y = A + Bx + Cx^2$; más tarde se integra cada trozo para obtener su área. Podemos, en lugar de ello, derivar el polinomio para obtener la *pendiente* de su curva, para cualquier valor de x. De esta manera, obtenemos un resultado similar a (4.30) pero dando el valor de $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ en el punto medio $x = x_0$ en lugar del área de la tira entre las coordenadas $x_{-1} = x_0 - h$ y $x_{+1} = x_0 + h$. Esta aproximación, de poca complejidad, nos da:

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_0 \approx \frac{1}{2h}(y_{+1} - y_{-1}). \tag{4.32}$$

Pero este cálculo lo hemos hecho sólo con con tres ordenadas. Si quieres un resultado aún más preciso, puedes usar cinco en su lugar, encajando la curva a la ecuación $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$, y buscando sus constantes a partir de las ordenadas $x_0,\ x_0 \pm h,\ x_0 \pm 2h$, para después derivar. El resultado es sorprendentemente sencillo:

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_0 \approx \frac{1}{12h}\left[(y_{-2} - y_{+2}) + 8(y_{+1} - y_{-1})\right]. \tag{4.33}$$

Si alguna vez te atascas en la resolución de un problema, no te olvides de que siempre puedes recurrir a la aritmética – ¡al fin y al cabo, ahí es donde las matemáticas empezaron! Existen a día de hoy innumerables libros sobre métodos numéricos, e incluso los ordenadores más viejos pueden hacer todos los cálculos por tí.

Ejercicios

1) Comprueba que se cumple $\mathsf{D}\mathsf{D}^{-1} = \mathsf{D}^{-1}\mathsf{D} = \mathsf{I}$ cuando los *operadores* $\mathsf{D}, \mathsf{D}^{-1}$ se aplican a las funciones listadas en la Tabla 1. (*Pista*: Primero trabaja con el ejemplo visto en el capítulo para $f(x) = x^n$. Después haz lo mismo con el resto de funciones, mediante pasos similares.)

2) Obtén $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ para las funciones $y = f(x)$ de la Tabla 2 y comprueba una vez más que $\mathsf{D}\mathsf{D}^{-1} = \mathsf{D}^{-1}\mathsf{D} = \mathsf{I}$.

3) Para este ejercicio, definiremos el *operador* x como "multiplicar por x". Demuestra que $\mathsf{D}\mathsf{x} - \mathsf{x}\mathsf{D}\mathsf{x}$ es equivalente al operador identidad, I, cuando se aplica sobre una función regular (Con "buen comportamiento") $f(x)$. (Esto es cierto para todos los valores de x en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.) (*Pista*: Mantén la función $f(x)$, mientras ejecutas los operadores, y líbrate de ella al final para obtener el resultado.)

4) Usa la ecuación (4.13) para obtener una expresión para la distancia s_{12} entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en una parábola de ecuación $y = x^2$. Trata de resolver la integral mediante métodos vistos en la Sección 4.3. Si no lo consigues, utiliza los de la Sección 4.5 para obtener una aproximación.

5) Trabaja sobre el cálculo que hicimos del volumen de agua en una piscina. Pero ahora supón que queremos calcular el volumen de agua (o vino) contenido en un cáliz de forma parabólica $z = A + Br + Cr^2$, siendo z la altura del líquido relativa a la base (donde $z = 0$) y r el radio del contenedor a una altura z.

Primero calcula las constantes A, B, C para la ecuación del cáliz que tendrá $Z = 6$ cm de profundidad y anchura de $R = 2{,}5$ cm en la parte superior.

Cuando el cáliz esté lleno hasta arriba, ¿cuánto vino cabrá? Y cuando parece que está medio lleno, con $(z = \frac{1}{2}Z)$, ¿cuánto líquido queda en realidad?

6) Resuelve las siguientes integrales indefinidas (en las que a, b son constantes):

(a)

$$\int \frac{cx}{ax^2 + b}\mathrm{d}x$$

(*Pista*: usa (4.25))

(b)

$$\int x \cos x^2 \mathrm{d}x$$

(*Pista*: pon $x^2 = u$)

(c)

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}\mathrm{d}x$$

(*Pista*: pon $\sqrt{x} - 1 = t^2$)

(d)

$$\int x^3 \sqrt{x^2 - 1} \mathrm{d}x$$

(*Pista*: pon $x^2 - 1 = t^2$)

(e)

$$\int x^2 e^x \mathrm{d}x$$

(*Pista*: usa (4.28), tomando $e^x = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$)

7) Muestra cómo los resultados del último ejercicio cambiarán si reemplazamos x por cx ($c =$ constante).

Capítulo 5

Series de potencias, convergencia y el teorema de Taylor

5.1. Secuencias, series y sumatorios

Ya desde el libro 1 (Sección 5.1) pudimos ver conjuntos de números con características muy especiales (y útiles). Por ejemplo, la "serie exponencial"

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + ... \tag{5.1}$$

es la **suma** de la **secuencia** de términos 1, 1, 1/2, 1/6, 1/120, ... que continúa de manera infinita. El término general de la secuencia tiene la forma $1/n!$, donde $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \ ... \ \times n$, el "factorial de n", es el múltiplo de los n primeros números naturales.

De forma similar, la secuencia de términos $a, ax, ax^2, ax^3,$ ... forma una "progresión geométrica". La suma de estos términos,

$$S = a + ax + ax^2 + ax^3 + \ ... \ , \tag{5.2}$$

forma una **serie geométrica** en la que cada término, u_r, depende de dos números: a y x.

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ ... \quad (u_r = ax^{r-1}). \tag{5.3}$$

Ahora, llevemos estos conceptos un paso más lejos.

En general, una secuencia es un conjunto de términos que pueden ser colocados con un orden definido, como $u_1, u_2, u_3,$ ..., donde el subíndice muestra el lugar que ocupa cada término. Estas secuencias pueden ser **finitas** cuando tienen un último término, u_n, (con n finita). Y en caso de que no lo haya, diremos que la secuencia es **infinita**.

De manera muy habitual, el término general u_r en una secuencia se obtiene a partir de su subíndice r aplicado a alguna regla sencilla, como en las progresiones geométricas, donde el término $r$ésimo es $u_r = ax^{r-1}$. Por otro lado, en la serie exponencial (5.1), el término general se expresa como $u_r = 1/r!$, comenzando desde $r = 0$, para cuyo cálculo es necesario tener en cuenta que se define $0! = 1$.

Cuando una secuencia es infinita, esta puede tener un **límite**, que es el valor al que los u_r se aproximan a medida que tomamos un r mayor. Este límite se representa formalmente como $\lim_{r\to\infty}(u_r)$; y si este límite es un número finito y único (obtenemos el mismo valor calculándolo de distintas maneras) decimos que la secuencia **converge**. En el resto de casos, decimos que la secuencia **diverge**: no tendrá límite finito, o el último término puede variar enormemente dependiendo del valor de r. Casi siempre estudiaremos secuencias *convergentes*.

Cuando los términos de una secuencia se *suman*, como en (5.1) y (5.2), lo denominamos **serie**. En muchas ocasiones, es útil sólo incluir en esta suma los primeros n términos de la secuencia, a lo que llamamos **suma parcial**. La suma parcial, o la 'suma de los n primeros términos', se define por tanto como:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ ...\ u_n = \sum_{r=1}^{n} u_r. \tag{5.4}$$

Al igual que una secuencia infinita puede o bien converger o diverger, ocurre lo mismo con las *series* infinitas. Estas series **convergen** cuando las sumas parciales (5.4) van aproximándose a un límite finito y único S, a medida que n aumenta de valor:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n. \tag{5.5}$$

En caso contrario, la serie **diverge**.

La serie (5.1) es convergente. Pero la serie (5.2), que depende de la variable x, es convergente sólo cuando el módulo de x es menor que 1, es decir, cuando $|x| < 1$. En el resto de casos, es decir, cuando $|x| \geq 1$, el valor de S_n aumenta sin límite cuando $n \to \infty$ y por tanto la serie diverge.

En el Libro 1, concretamente en la Sección 5.1, supusimos que una serie convergería a medida que sus términos cada vez fueran menores; pero ahora tratemos de ser más precisos. Nos hacemos por ello la pregunta:

¿Cómo podemos saber si una serie converge?

Para empezar, es ciertamente *condición necesaria* que la secuencia de términos que la forman (5.4) sea convergente – esto es, que a medida que n aumenta infinitamente, $u_n \to 0$. Esto es necesario ya que explica que si se añadiesen más términos, la suma parcial S_n ya no variaría. Pero no es una **condición suficiente**. Por ejemplo, analicemos la serie

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ ... \ + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ ... \ .$$

El término *n*ésimo, $1/\sqrt{n}$ efectivamente se aproxima a 0 cuando $n \to \infty$; sin embargo, S_n *no*. Para comprobar que esto es cierto, hay que percatarse de que todos los términos que preceden a u_n son mayores que u_n, y por tanto, la suma de los n primeros términos será mayor que n veces el valor del último: $S_n > n \times (1/\sqrt{n})$. Expresado de otro modo, $S_n > \sqrt{n}$. A medida que n toma valores próximos al infinito, lo mismo ocurre con S_n y la serie por tanto diverge.

Hay varias condiciones que sí garantizan la convergencia de una serie dada, y son por tanto **condiciones necesarias y suficientes**. Algunos de estos **tests de convergencia** están basados en hacer una comparación con una serie cuya convergencia es conocida (como la serie geométrica, cuya suma parcial S_n ya fue expresada en el Libro 1, ecuación (5.1), para cualquier valor de n): si los términos de la serie dada son todos menores o iguales a los de una serie convergente conocida, entonces la serie dada debe ser también convergente. Otros tests se basan en comparar el término *n*ésimo de una serie dada con el que le sigue $(n+1)$, para ver si los términos se van haciendo mayores o menores. De estos tests, usaremos el llamado **Criterio de DAlembert**, que debemos al matemático francés dAlembert (1717- 1783):

$$\text{Si} \quad \lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1 \quad \text{la serie converge.} \tag{5.6}$$

En caso contrario, la serie diverge (excepto si este ratio da 1, en cuyo caso será necesario realizar alguna comprobación más).

Probémoslo con dos de las series que ya hemos utilizado antes:

Ejemplo 1. La serie geométrica.

Supongamos que no conociéramos la expresión de la suma de la serie geométrica $1 + x + x^2 + x^3 + \ ...$ (que es (5.2) con $a = 1$), sino sólo que su término general es $u_n = x^n$. Si aplicamos en ella el Criterio de DÁlembert (5.6):

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| \tag{5.7}$$

observamos que la serie converge mientras que $|x| < 1$. Para $|x| = 1$, $(x = \pm 1)$ este test no nos arroja solución, pero una suma infinita de 1s es claramente infinito, y la serie diverge.

Ejemplo 2. La función exponencial.

Como ya hemos visto con anterioridad, la función $y = e^x = \exp x$ se define por la serie

$$y = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ ... \tag{5.8}$$

Su término general es por tanto $x^n/n!$ y aplicándole el ratio de (5.6) nos queda

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1}. \tag{5.9}$$

Tras aplicar el límite de $n \to \infty$, nos queda

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = 0 \tag{5.10}$$

y por tanto la serie converge para *todos* los valores reales que pueda tomar la variable x.

5.2. Las series de potencias y su convergencia

Funciones como (5.2) y (5.8) son ejemplos de **series de potencias**, que consisten en sumas ordenadas de *potencias* de la variable independiente x, cada una con un coeficiente constante: en general

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ ... \ , \tag{5.11}$$

donde a_0, a_1. a_2 ... son los coeficientes (números constantes), es una serie de potencias que representa la función $f(x)$. En este caso, las potencias son enteros positivos, incluyendo al cero (que nos da el primer término $a_0 = a_0 x^0$).

La condición de convergencia (5.6) toma para esta serie la forma

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|x|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1, \tag{5.12}$$

que también puede escribirse como

$$|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R \tag{5.13}$$

donde R, el límite de la parte derecha en la última ecuación, es el llamado **radio de convergencia** de la serie. Si dibujamos un círculo de radio R alrededor del punto $x = 0$, entonces la serie convergerá únicamente para los valores de x contenidos en el círculo (es decir, entre $-R$ y $+R$).

Te preguntarás por qué hablamos del radio de un círculo. Es así porque en el análisis matemático no sólo se estudian los números reales, sino también los *complejos* (Libro 1, Capítulo 5) $z = x + iy$, donde i es la 'unidad imaginaria'con la propiedad $i^2 = -1$. Los números complejos $x+iy$, dependen de *pares* de números reales, x e y, y tienen un módulo $|z|$, que también es real, y se calcula utilizando $|z|^2 = x^2 + y^2$. De esta manera, si se utiliza el par (x, y) como coordenadas de un punto del plano, entonces $|z|$ sería su distancia del origen ($x = y = 0$); y la condición $|z| < R$ se cumpliría para todos los puntos comprendidos dentro del círculo de radio R – y no sólo para los *reales*, representados como puntos en el eje X entre $x = -R$ y $x = +R$. Pero el tema del análisis matemático, aplicado a funciones de variable compleja, necesitaría de por sí un libro entero, por lo que aquí no lo trataremos.

Para las series geométricas (5.2), $R = 1$; pero para las exponenciales (5.8), $R = \infty$. La función exponencial $y = \exp z$ es por tanto convergente para *todos* los valores de z, ya sean reales o complejos. A partir de esto, series de funciones como $y = \sin x, y = \cos x$, ya usadas en el Libro 1, serán también convergentes para todos los valores de la variable x, ya que son combinaciones de las funciones exponenciales $\exp ix$ y $\exp -ix$, esto es e^z para dos valores imaginarios $z = \pm ix$ de la variable independiente. En la siguiente sección estudiaremos cómo representar cualquier función mediante una serie de potencias.

5.3. El teorema de Taylor

Al final del anterior capítulo, (en la Sección 4.5) usamos una serie de 3 potencias $y = f(x) \approx A + Bx + Cx^2$ para representar cualquier función dada $y = f(x)$ en el intervalo de $(x_0 - h)$ a $(x_0 + h)$, siendo x_0 el punto medio del intervalo. De esta manera fuimos capaces de calcular el área de una franja de anchura $2h$, bajo la curva, en función de las correspondientes ordenadas (valores de la función) $y_{-1} = f(x_0 - h)$, $y_0 = f(x_0)$, $y_{+1} = f(x_0 + h)$. Y sumando las áreas de muchas franjas similares, podíamos estimar el valor de la *integral definida*, representada como el área bajo toda la curva comprendida entre cualesquiera límites dados $x = a$ y $x = b$. También nos percatamos de que usando una aproximación con 5 términos $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ conseguiríamos un resultado más exacto.

Estudiemos ahora un caso más general, usando un polinomio de grado $n$ésimo,

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ ... \\ &\quad + a_n x^n, \end{aligned} \tag{5.14}$$

en el que hay $(n + 1)$ coeficientes $a_0, a_1,\ ...$
a_n. Los coeficientes pueden ser hallados, una vez más, en términos de las ordenadas $y_0, y_1,\ ...\ y_n$ correspondientes a un conjunto de valores x: $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h,\ ...\ x_n = x_0 + nh$ (usando h como espaciado común entre una ordenada y la siguente). Pero en lugar de calcular los coeficientes de esa manera, que es bastante complicada, utilizaremos un brillante truco descubierto por Brook Taylor. Él descubrió todos estos coeficientes podrían ser calculados *derivando* la función $f(x)$ y más tarde tomando $x = 0$. De esta manera, a_0 es el único término que queda cuando $x = 0$ – ya que todas las potencias de x son 0 y nos queda $f(0) = a_0 + a_1 \times 0 + a_2 \times 0 +\ ...\ $ – y por ello $a_0 = f(0)$.

El siguiente paso es derivar sucesivamente la función:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 0 + a_1 + 2xa_2 + 3x^2a_3 + 4x^3a_4 + \ .. \\
f''(x) &= \frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2} = 0 + 0 + 2a_2 + 6xa_3 + 12x^2a_4 + \ ... \\
f'''(x) &= \frac{\mathrm{d}^3f}{\mathrm{d}x^3} = 0 + 0 + 0 + 6a_3 + 24xa_4 + \ ... \\
f^{(4)}(x) &= \mathsf{D}^4 f(x) = 0 + 0 + 0 + 0 + 24a_4 + \ ... \ ,
\end{aligned}$$

etcétera. (Nota: el superíndice en $f^{(4)}(x) = \mathsf{D}^4 f(x)$ significa "$f(x)$ derivada 4 veces" y el símbolo D, ya usado en capítulos anteriores es equivalente al *operador* $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)$ – en este caso aplicado 4 veces.)

Finalmente, apliquemos $x = 0$ en todas las ecuaciones anteriores. Los resultados son

$$\begin{aligned}
&f(0) = a_0,\ f'(0) = a_1,\ f''(0) = 2a_2,\ f'''(0) = 6a_3, \\
&... \ , f^{(m)}(0) = m!a_m,\ ... \ , \qquad (5.15)
\end{aligned}$$

donde el término general (el último mostrado) contiene al *factorial* $m! = 1{,}2{,}3.\ ...\ m$. Usando (5.15) en (5.14) finalmente obtenemos el **Teorema de Taylor** para un polinomio finito de grado $n$ésimo:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \ .. \\
&\quad + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0). \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

Esta serie termina tras $n + 1$ términos, y la expansión de $f(x)$ es alrededor el origen, $x = 0$, y no alrededor de un punto en mitad del rango del que podamos necesitar la serie. Además, de momento no hemos probado que este polinomio sea equivalente a *ninguna* función – salvo otro polinomio. ¡Pero es un buen comienzo!

Una forma más general del teorema, en la cual la función $f(x)$ es expandida en torno a cualquier punto, y no sólo $x = 0$, es la que sigue. Introducimos una nueva variable $\bar{x} = x + h$, tal que cuando $x = 0$ $\bar{x}$ tomará el valor $\bar{x} = h$, y ahora prestamos atención a la función $f(\bar{x}) = f(x + h)$. Si mantenemos x constante, podemos desplazarnos a lo largo de la curva $y = f(\bar{x})$ cambiando h y hablando de $y = f(x + h)$ como una nueva función $y = g(h)$. Como $\bar{x}$ y h difieren únicamente por la constante (x), las derivadas $dy/d\bar{x}$ y dy/dh, serán iguales; y esto será cierto en sucesivas derivaciones. De este modo

$$g(h) = f(\bar{x}),\ g'(h) = f'(\bar{x}),\ g''(h) = f''(\bar{x}),\ \text{etc.}$$

Ahora apliquemos (5.16) sobre la nueva función $g(h)$, tras lo que obtenemos

$$g(h) = g(0) + hg'(0) + \frac{h^2}{2!}g''(0) + \frac{x^3}{3!}g'''(0) + \ \text{etc}$$

y ahora expresemos esto en términos de $f(x+h) = g(h)$ y sus derivadas, teniendo en cuenta que $h = 0$ se corresponde a $\bar{x} = x$. Nos queda

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \\
&\quad ... + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x),
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

donde la función y sus derivadas, a la derecha, son todas evaluadas en torno a un punto general x, en lugar de en torno al origen $x = 0$. En la mayoría de casos, esta expresión del polinomio de Taylor es más útil que el primer caso visto anteriormente (5.16).

Mientras apliquemos esta expansión a una función polinómica finita, la expresión de arriba de arriba es generalmente válida; sin embargo, ¿no sería mejor aún si pudiéramos utilizar esta misma expresión con cualquier función derivable? Parece probable que sí se pueda hacer esto, ya que, como sabemos, una función dada suele poder ser aproximada, al menos en un pequeño intervalo, por un polinomio con pocos términos; y tomando más y más términos podemos esperar obtener una representación casi equivalente de la función original en todo el intervalo en que la función se comporta de manera 'regular'. Pero *demostrar* que esto se puede realizar es difícil: requiere que hablemos del **resto** R_n – el sumatorio de todos los términos restantes tras haber escrito los primeros n términos de la serie de Taylor – y eso es temática avanzada, para auténticos matemáticos. Nosotros sólo asumiremos que se pueden encontrar series de Taylor para todas las funciones derivables. Los siguientes ejemplos muestran cómo se puede realizar esto:

Algunos ejemplos de series de Taylor

A pesar de que ya conocemos algunas series que representan funciones comunes como $\exp x, \sin x, \cos x$, es interesante comprobar como también pueden extraerse a partir del teorema de Taylor, siempre y cuando sepamos derivarlas adecuadamente. Miremos un par de ellas, y luego otra aún no estudiada.

Ejemplo 1. Las series de la función exponencial y logarítmica

Olvidemos por un momento la serie para la función e^x, y supongamos que lo único que sabemos de ella es que su derivada $f'(x)$ nos devuelve la misma función: $f'(x) = f(x)$. Con esto, obtenemos todas las derivadas que queramos:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{D}f &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x), \\
\mathsf{D}^2 f &= \mathsf{D}\mathsf{D}f = f''(x), \\
\mathsf{D}^3 f &= \mathsf{D}\mathsf{D}^2 f = f'''(x), \ ... \ ,
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

etc. Utilizando (5.16) nos queda

$$
e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ ... \ . \tag{5.19}
$$

Esta es la misma serie dada en (3.22); pero en este caso la hemos hallado a partir de $f'(x) = f(x)$.

Cuando por primera vez definimos la función logarítmica, $y = \log x$, no encontramos una serie para ella: en su lugar, la tuvimos que expresar como una *integral*, $\log x = \int (1/x)\mathrm{d}x$. Ahora demostraremos como también puede ser expresada a partir de una serie de Taylor.

Como $1/x$ es una función 'desagradable', que 'despega', junto con todas sus derivadas, en el punto $x = 0$, cambiémosle a una nueva variable t usando $1+t$ en lugar de x en la forma de integral. Nos queda

$$\log x = \int \frac{1}{1+t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = \log(1+t).$$

Si ahora tomamos la integral *definida*, con límites $t = 0$ (inferior) y $t = x$ (superior), tenemos que

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}dt = [\log(1+t)]_{t=0}^{t=x} = \log(1+x), \tag{5.20}$$

ya que el límite inferior es $\log 1 = 0$.

Ahora podemos fácilmente obtener la serie que queremos usando que $(1+t)^{-1}$ es la suma infinita de los términos de una progresión geométrica simple (Libro 1, Sección 5.1):

$$(1+r)^{-1} = 1 + r + r^2 + r^3 + \ \dots\ ,$$

con 'razón'r igual a $-t$. Usando esto en el integrando de la izquierda en (5.20) y integrando término por término nos queda

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ \dots\ . \tag{5.21}$$

Es importante notar que la serie converge únicamente para valores de x entre -1 y $+1$.

Ejemplo 2. Las series del seno y coseno

Las funciones $\sin x$ y $\cos x$ son *periódicas*, sus imágenes se repiten cada vez que la variable x aumenta en 2π o, con un cambio de signo, cuando aumenta en π. Alguna de sus propiedades aparece resumida en el Libro 2, Capítulo 4; y ya sabemos por (3.7) que,

$$\mathsf{D}\sin x = \cos x, \qquad \mathsf{D}\cos x = -\sin x. \tag{5.22}$$

A partir de estas propiedades, y mediante repetición, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}^2\sin x &= \mathsf{D}\cos x = -\sin x,\\
\mathsf{D}^3\sin x &= \mathsf{D}(-\sin x) = -\cos x,\\
\mathsf{D}^4\sin x &= \mathsf{D}(-\cos x) = \sin x,
\end{aligned}$$

etc., donde cada término sigue al inmediatamente anterior a él.

Para obtener la serie de Taylor equivalente de $\sin x$, todas estas derivadas han de ser evaluadas... – pero sólo en $x = 0$; ¡y eso es fácil! Los senos son todos 0, mientras que los cosenos son ± 1, alternándose el signo. Poniendo estos resultados en (5.16) obtenemos

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ \dots \ . \tag{5.23}$$

La serie de Taylor para el coseno se realiza de manera similar, comenzando con $\mathsf{D} \cos x = -\sin x$ y hallando

$$\begin{aligned} \mathsf{D}^2 \cos x &= -\mathsf{D} \sin x = -\cos x, \\ \mathsf{D}^3 \cos x &= \mathsf{D}(-\cos x) = +\sin x, \\ \mathsf{D}^4 \cos x &= \mathsf{D}(\sin x) = \cos x, \end{aligned}$$

etc., y cuando $x = 0$ las derivadas una vez más toman sólo los valores $0, \pm 1$. Sustitución en (5.16) nos da

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ \dots \ . \tag{5.24}$$

Como la serie exponencial, estas expansiones convergen para todos los valores de x en el intervalo infinito $(-\infty, +\infty)$.

Ejemplo 3. Las series de binomios

Conocimos por primera vez estas series en la Sección 3.1, donde expandimos $(a+b)^n$ y hallamos los tres primeros términos de la serie en (3.2). Si sustituimos $a = 1, b = x$ la serie se convierte en

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ \dots \ . \tag{5.25}$$

El resultado fue usado para derivar $y = x^n$, donde n era un entero positivo, pero ahora queremos demostrar que esta misma serie es válida para todos los valores reales de n, ya sean positivos o negativos, racionales o irracionales. El teorema de Taylor (5.16) nos permite hacerlo con facilidad.

En este caso la función que estamos expandiendo es $f(x) = (1 + x)^\alpha$, donde tanto x como α son dos reales cualesquiera. Y necesitaremos todas las derivadas, $f'(x) = \mathsf{D}f(x),\ f''(x) = \mathsf{D}^2 f(x),\ \dots$, a pesar de que en teoría aún no sabemos cómo derivar $(1 + x)^\alpha$ para valores generales de α. Para comenzar, supongamos que podemos usar la misma regla que usábamos si α era un entero: en ese caso $\mathsf{D}(1 + x)^\alpha = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ (expresado en palabras "multiplicar por el exponente α y luego restar 1 al exponente α").

Usando esta regla, las derivadas que necesitamos serían

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1 + x)^{\alpha-1},\ f''(x) = \alpha(\alpha - 1)(1 + x)^{\alpha-2}, \\ f'''(x) &= \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(1 + x)^{\alpha-3} \ \dots \ , \end{aligned}$$

etc. Y cuando aplicamos $x = 0$ nos quedan como resultado

$$f'(0) = \alpha,\ f''(0) = \alpha(\alpha - 1),\ f'''(0) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2),$$

etc. De (5.16) sigue que los primeros términos de la Serie de Taylor son

$$(1 + x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!}x^3 + \ .. \tag{5.26}$$

Esto es exactamente lo mismo que en (5.25), excepto que en lugar del entero n ahora estamos tomando α como *cualquier número real*.

Por supuesto, deberíamos *demostrar* que las derivaciones se pueden realizar igual que como derivábamos x^n en la Sección 3.1. Esto es algo complicado, por lo que lo pondremos en la siguiente nota a pie de página, que no es necesario leer para continuar avanzando en el Libro.

Nota: cómo derivar x^{α} para cualquier α

Miremos atrás a la sección que comienza con la ecuación (3.26). En ella, se define la función logarítmica como la *inversa* de la exponencial: en general, si $p = e^q$ podemos darle la vuelta y decir que $q = \log p$ (q es el exponente al cual debemos elevar la *base* e para obtener p). De esta manera, podemos escribir

$$p = e^q = e^{\log p},\ \text{para cualquier número } p.$$

Esto es una *identidad*: la parte derecha de la ecuación $p = e^{\log p}$ es sólo una manera distinta de expresar lo mismo, p.

Aquí tenemos que tratar con $y = x^{\alpha}$; y nos ayudará (veremos por qué en un minuto) introducir un logaritmo escribiendo $x = e^{\log x}$. Entonces, usando (3.23), podemos escribir

$$y = x^{\alpha} = e^{\alpha \log x}$$

y podemos derivar esto mediante un 'cambio de variableúsando (2.22). Para ello, primero recogemos en una nueva variable $\alpha \log x = u$, y dejamos la expresión de antes como $y = e^u$.. Sabemos que $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}u) = y = e^u$ (propiedad básica de la función exponencial); y por (2.22) que $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x) = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}u)(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{\alpha \log x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\alpha \log x) = x^{\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\alpha \log x) = x^{\alpha}(\alpha\frac{1}{x}) = \alpha x^{\alpha - 1}$$

donde hemos usado la propiedad (3.28) de la función logaritmo. Por consiguiente, el resultado final es

$$y = x^{\alpha}: \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha x^{\alpha - 1} \tag{5.27}$$

– tal y como si α fuera un entero.

Es posible encontrar un polinomio de Taylor para *cualquier* función en torno a cualquier punto donde existan sus derivadas – ¡siempre y cuando tengamos la suficiente paciencia para hacer tantas derivaciones!

Ejercicios

1) Obtener series de potencias equivalentes a las siguientes funciones alrededor del punto $x = 0$:

(a) $\sin x/x$, (b) $\cos x/x$,

(c) $(1 - \cos x)/x^2$, (d) $(\sin x - x)/x^3$.

¿Cuáles son los valores que toman estas funciones en el límite (si existe) cuando $x \to 0$?

(*Pista*: Usar las series en (5.23) y (5.24))

2) Obtén la serie

$$\tan x = x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{16x^5}{5!} + \ ... \ ,$$

hallando sus primeros términos mediante el Teorema de Taylor. (*Pista*: debes derivar $\tan x$ varias veces consecutivas, y posteriormente debes aplicar $x = 0$ en los resultados; y no te olvides que una forma de expresar la derivada de la tangente es $1 + \tan^2 x$.) ¿Puedes comprobar que el siguiente término será $272x^7/7!$?

3) Utiliza el mismo método del ejercicio anterior para obtener las siguientes series:

(a)

$$e^x \cos x = 1 + x - \frac{2}{3!}x^3 - \frac{2^2}{4!}x^4 - \frac{2^2}{5!}x^5 + ...$$

(b)

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{2^2}{5!}x^5 - \frac{2^2}{6!}x^6 + ...$$

Esboza estas funciones para algunos pequeños valores de x y explica el motivo de que estas series contengan tanto potencias de exponente par como de exponente impar, mientras que con las series en (5.23) y (5.24) no ocurre así.

4) A partir de la serie (5.26) de $(1 + x)^\alpha$, obtén el siguiente polinomio

$$\begin{aligned}(x + y)^\alpha &= x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1}y + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{\alpha-2}y^2 \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-3)}{3!}x^{\alpha-3}y^3 + \ ...\end{aligned}$$

y comprueba que converge para $y/x < 1$ para todos los valores reales de α.

Capítulo 6

Un vistazo rápido a algunas cosas que necesitaremos más tarde

6.1. Funciones de más de una variable

En el comienzo de este manual, en la Sección 3.1, aprendimos que una función puede depender de más de una variable: cuando subimos por una montaña, podemos recorrer una distancia x en dirección Este, y luego una distancia y hacia el Norte (ambas medidos en relación con un eje X y un eje Y, que parten desde el origen O de la Fig.23). Al final, estaremos a una altura z sobre el plano horizontal (que contiene a los ejes X e Y): nos habremos movido una distancia z sobre el eje vertical Z.

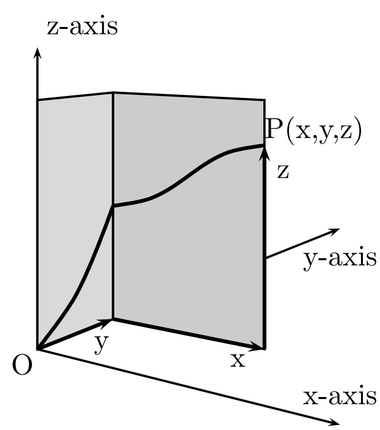


Figura 23

(Si te has perdido, echa un vistazo rápido al Manual 2)

El punto final P que alcanzamos tiene *coordenadas* x, y, z y nos referimos a él como “el punto $\mathrm{P}(x, y, z)$”. Y si mantenemos z fija y continuamos andando, sin subir ni bajar, entonces nuestro camino describirá una **curva de nivel**: estará descrita por una relación $f(x, y) = z =$ constante. Existirá una curva de nivel para cada valor de la altura, con lo que podemos hablar de una ‘familia’ de curvas, $z_1 = f_1(x, y), z_2 = f_2(x, y)$, ... *etc.* (Si alguna vez has utilizado un mapa topográfico, sabrás que mediante muchas curvas de nivel se puede obtener una clara imagen de la forma del terreno sobre el que estás andando. Por ejemplo, cerca de la cima de una montaña los contornos tendrán forma parecida a al de una circunferencia, y la cima será un punto P cercano a su mitad).

En este ejemplo, $z = f(x, y)$ expresa la altura de cualquier punto en la superficie como la función de dos variables independientes, las distancias recorridas en dirección X e Y, pero en la ciencia, podemos encontrarnos infinitud de relaciones de este tipo que poco tengan que ver con distancias. Así que necesitamos extender lo que sabemos sobre funciones de una variable a funciones de dos, o más, variables. Es fácil hacer esto para dos variables, porque podemos ayudarnos de dibujos, y una vez sepamos expresar lo que vemos en los dibujos como relaciones matemáticas, podremos aplicar lo mismo a un mayor número de variables: así qu empecemos desde la Fig.23.

Al avanzar en dirección Y, mantuvimos la x fija con el valor $x = 0$ tal que sólo y y z cambiasen mientras subíamos por la montaña, con $z = f(0, y)$ – una función de una única variable. Tras andar en dirección Y (diagmos, hacia el Norte) hasta $y = 1$, giramos y andamos hacia el Este. El camino de este nuevo recorrido estará ahora descrito por $z = f(x, 1)$, una vez más, una función de una sólo variable – pero *distinta* a la anterior.

Ahora bien, en el Cálculo estamos interesados en conocer qué ocurre cuando las variables aumentan en cantidades infinitesimales, $\delta x, \delta y, \delta z$, y en ratios como $\delta z/\delta x$, que expresan *tasas de variación*, o *pendientes*. Si estamos en la cima de la montaña de la Fig.23 y avanzamos un poco (δx) en la dirección X, entonces el cambio en z será de

$$\delta z \approx \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y)_{\mathrm{y\ fija}} \times \delta x;$$

pero si avanzásemos en la dirección Y, una distancia δy, nos quedaría

$$\delta z \approx \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x, y)_{\mathrm{x\ fija}} \times \delta y.$$

Es conveniente reescribir estos dos cambios usando **diferenciales** en lugar de ‘deltas’ (revisa el Capítulo 2 para recordar qué eran): con esta notación, la primera expresión nos queda

$$\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x$$

y la segunda,

$$\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y.$$

Cuando ambos cambios se realicen a la vez, entonces el cambio total nos quedará

$$\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y. \tag{6.1}$$

(Ten en cuenta que, de la misma manera que hemos utilizado en varias ocasiones $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ y $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ para significar lo mismo cuando $y = f(x)$, $\partial z/\partial x$ y $\partial f/\partial x$ significarán lo mismo cuando $z = f(x, y)$; no importa si usamos el mismo nombre para la cantidad z o la función $f(x, y)$, que nos indica cómo obtenerla a partir de x e y)

Las cantidades que hemos puesto entre paréntesis, las que contienen "d onduladas", son las llamadas **derivadas parciales**. Son exactamente lo mismo que derivadas normales, salvo por que están definidas para funciones de más de una variable independiente; y el subíndice nos indica qué variable mantenemos *fija* (es decir, tratamos como constante). Por ello, para una función $f(x, y)$ hay dos derivadas parciales, $(\partial f/\partial x)_y$ y $(\partial f/\partial y)_x$. Éstas se definen como

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y &= \lim_{\delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\delta x, y) - f(x, y)}{\delta x}\right), \\
\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x &= \lim_{\delta y\to 0}\left(\frac{f(x, y+\delta y) - f(x, y)}{\delta y}\right)
\end{aligned} \tag{6.2}$$

– exactamente igual que como definimos las derivadas normales, en el Capítulo 2, Sección 2.3, que deberías leer otra vez, para asegurarte.

Ejemplo

Como ejemplo de cómo funciona esto, estudia la función

$$z = f(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2$$

y encuentra sus dos primeras derivadas, una para cada variable. Son las siguientes:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 2x - 2y, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = -2x - 6y.$$

Para obtenerlas, el proceso es sencillo; todo lo que se ha de hacer es derivar con respecto a una variable, tratando la otra como si fuera una constante. Y con sólo *dos* variables independientes, no es ni tan siquiera necesario escribir los subíndices, ya que sólo nos están indicando que queda fija "la otra". Esto es lo que haremos de ahora en adelante.

Ahora, trata de hacer algunos de los ejercicios del final del capítulo.

Hacia el final de la Sección 2.3, cuando hablábamos de funciones de una sóla variable, vimos cómo obtener más derivadas mediante la derivación varias veces de la función (dos veces para obtener la 'segunda' derivada, tres para obtener la 'tercera' etc. : $\mathrm{d}^2 f/\mathrm{d}x^2$ and $\mathrm{d}^3 f/\mathrm{d}x^3$, etc.) y podemos aplicar lo mismo a funciones de más de una variable. Si $z = f(x, y)$ podemos primero obtener sus primeras derivadas, como $(\partial f/\partial x)$ en (6.2), y continuar de esta manera para obtener

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \tag{6.3}$$

etcétera.

Cuando hagamos más de una derivación, sobre más de una variable, debemos fijarnos en el orden en que derivamos: normalmente, en

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right),$$

la operación más cercana a la función f es la que llevamos a cabo primero – pero en otros libros lo hacen al revés, así que ten cuidado. La regla que usamos nosotros es parecida a la que utilizábamos con los operadores $\mathsf{D}_x, \mathsf{D}_y$. La segunda derivada de la que hablamos puede escribirse de esta manera como $\mathsf{D}_x\mathsf{D}_y\, f$, lo que es más simple y claro. Y, al igual que con las funciones de una variable, podemos incluso simplificar más las cosas: las notaciones para la primera derivada son

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathsf{D}_x\, f = f_x, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathsf{D}_y\, f = f_y, \tag{6.4}$$

y para las segundas tenemos

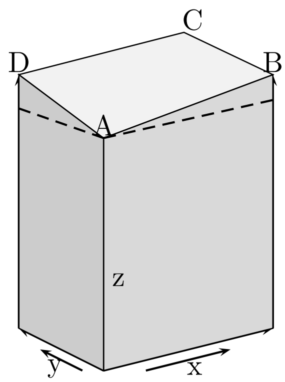
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathsf{D}_x\mathsf{D}_x\, f = f_{xx} \tag{6.5}$$

y

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \mathsf{D}_x\mathsf{D}_y\, f = f_{xy}. \tag{6.6}$$

(Fíjate en que no es necesario poner una comilla en la función por cada vez que la derivamos, ya que los subíndices f_x, f_{xy}, en (6.5) y (6.6) nos muestran qué y cuántas derivaciones hemos hecho.) Los libros más antiguos usan la notación completa, es decir, la parte izquierda de estas expresiones, que es la original utilizada por Leibnitz en los orígenes del cálculo, pero a menudo nosotros usaremos las expresiones más simples de la derecha. De cualquier manera, asegúrate de aprenderte bien todas.

En la Fig.24 puedes ver qué significan las derivadas, qué ocurre cuando $x \to x + \mathrm{d}x$ y $y \to y + \mathrm{d}y$.



A: $z = f(x, y)$
B: $z = f(x + \mathrm{d}x, y)$
C: $z = f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$
D: $z = f(x, y + \mathrm{d}y)$

Figura 24

Ejemplo.
Vamos a buscar las segundas derivadas de la siguiente función.

$$z = f(x, y) = x^3 + 4x^2y - 6xy^2 - 2y^3.$$

Derivando, obtenemos las primeras derivadas:

$$(\partial f/\partial x) = 3x^2 + 8xy - 6y^2,\ (\partial f/\partial y) = 4x^2 - 12xy - 6y^2,$$

y derivando una vez más, obtenemos cuatro derivadas segundas distintas:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) &= 6x + 8y, \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = 8x - 12y, \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) &= 8x - 12y, \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = -12x - 12y. \end{aligned}$$

Fíjate en que los resultados de las derivadas 'mixtas' (en las que derivamos una vez con respecto a x y otra con respecto a y) son exactamente iguales: no importa sobre qué derivemos primero. Esto se cumple para *todas* las funciones que hemos llamado ya en varias ocasiones "de buen comportamiento" (lo que implica que hay un único valor de z para cada combinación de las variables independientes, que la función es *continua* y *derivable*, etc.).

La Fig.24 nos muestra cuatro puntos vecinos A,B,C,D en la superficie: están sobre las esquinas del rectángulo dle suelo, que está contenido en el plano XY. Las líneas discontinuas forman un plano que pasa por A, y es paralelo a la base, para que puedas ver fácilmente las pendientes de los lados de la cara superior. Estas pendientes son

$$\begin{aligned} \text{pendiente}_{\text{AB}} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathsf{D}_x f = f_x(x, y), \\ \text{pendiente}_{\text{AD}} &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathsf{D}_y f = f_y(x, y). \end{aligned}$$

Aquí las expresiones de la derecha nos muestran también las variables para el punto A en el cual se evalúan las derivadas. La pendiente del lado BC, en el punto B será

$$\text{pendiente}_{\text{BC}} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathsf{D}_y\, f = f_y(x + \mathrm{d}x, y).$$

Nota que esta es la pendiente en la dirección Y, donde sólo cambia la x, y es evaluada usando las variables dle punto B. ¿Por qué no damos fórmula para la pendiente en la dirección X? Simplemente porque sólo la y está cambiando si nos movemos por BC y la pendiente X es por tanto 0. Ahora mira a los puntos C y D y escribe las pendientes de los lados BC y CD. (Haz un dibujo grande de la Fig.24, para poder escribir sobre él y ver qué estás calculando)

En resumen, partiendo desde A, a una altura $z = f(x, y)$, se puede incrementar x un poco, manteniendo y fija, lo que nos lleva a B donde $z = f(x+\mathrm{d}x, y)$. Entonces puedes aumentar y en una pequeña cantidad $\mathrm{d}y$, lo que nos conduce hasta C donde $z = f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)$; y luego hasta D, cuya altura es de $z = f(x, y+\mathrm{d}y)$. Si conoces las pendientes en la dirección X e Y, *en el punto inicial* A, puedes estimar las alturas de los otros puntos B,C,D sin tener que re-calcular la función: por ejemplo, la altura de B será $z + \mathrm{d}z$ con $\mathrm{d}z \approx (\partial f/\partial x)\mathrm{d}x$, donde la aproximación es mejor cuanto menor es $\mathrm{d}x$. Esto significa que estamos tomando el lado AB como una línea recta, tocando la superficie en el punto A, cuando, en realidad, puede estar curvada. (Mira la Fig.14 en el Capítulo 2.) Lo mismo es cierto para el punto D, usando la pendiente de AD, que está en la dirección Y. Pero para obtener $z + \mathrm{d}z$ en el punto C debes comenzar en B; y no conoces la pendiente del lado BC, a pesar de que parece que será, aproximadamente, la misma que la de AD. Así que debemos permitir *dos* cambios – el cambio en el valor de f y en el de su primera derivada f'_y a medida que vamos de A a B. Para estimar el cambio en f_y cuando x varía desde x en A hasta $x + \mathrm{d}x$ en B, debemos introducir una *segunda* derivada. La pendiente en Y f_y es también una función de x e y, por lo que podemos decir

$$\mathsf{D}_x\, f_y(x, y) = \mathsf{D}_x\mathsf{D}_y\, f(x, y) = f_{xy}(x, y). \tag{6.7}$$

De la misma manera, la pendiente X $f_x(x, y)$ de AB cambiará con la tasa

$$\mathsf{D}_y\, f_y(x, y) = \mathsf{D}_y\mathsf{D}_x\, f(x, y) = f_{yx}(x, y). \tag{6.8}$$

Con lo que sigue que

$$\text{slope}_{\text{BC}} \approx \text{slope}_{\text{AD}} + f_{xy}(x, y) \times \mathrm{d}x$$

y, multiplicando por dy, el aumento en z yendo desde B hasta C será

$$f_y(x, y)dy + f_{xy}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Ahora está claro que para tener en cuenta el cambio de pendiente desde un lado de la superficie ABCD al opuesto (p.ej. desde AC a BD), hemos de conocer las segundas derivadas 'mixtas' f_{xy} y f_{yx}. Y para tener el cuenta el cambio en la pendiente f_x cuando nos movemos por cualquiera de los lados (p.ej., desde A hasta B) también debemos conocer las segundas derivadas f_{xx} y f_{yy}.

Como ya nos hemos hecho una imagen de lo que estamos haciendo, podemos usar las matemáticas de la Sección 5.3. Pero si el siguiente proceso te resulta complicado, puedes saltártelo e ir directamente a la ecuación (6.12).

El teorema de Taylor en la forma (5.17) nos da una manera de expandir cualquier función $f(x+h)$ en torno al punto general x, mediante potencias de h. Si lo utilizamos con nuestra nueva notación para las derivadas, toma la forma

$$f(x+h) = f(x) + hf_x(x) + (h^2/2!)f_{xx}(x) + (h^3/3!)f_{xxx}(x) + . \,, \tag{6.9}$$

donde h es el cambio que estamos aplicando a x y todas las derivadas son evaluadas sobre el punto inicial $h = 0$. Para una función de más de una variable, no hay mucho que cambiar: $f(x, y)$ ahora nos da la altura z en el punto A de la Fig.24 y si mantenemos y fijo, moviéndonos sobre la superficie ABCD únicamente en dirección X, (6.9) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} f(x+h,y) &= f(x,y) + hf_x(x,y) + (h^2/2!)f_{xx}(x,y) \\ &\quad + (h^3/3!)f_{xxx}(x,y) + \ \dots\,, \end{aligned} \tag{6.10}$$

donde todas las derivadas son *parciales*, con y tratada como constante.

Ahora pensemos en cambiar la segunda variable y, partiendo de A y aumentándola $y \to y + k$ mientras que mantenemos la primera variable fija, con su valor original. La función $f(x, y)$ y todas sus derivadas – que son también funciones de x, y – pueden ser expandidas en potencias de k, usando y en lugar de x y k en lugar de h. Así que moviéndonos sobre la superficie ABCD en la dirección Y, para cualquier valor fijo de x podemos decir

$$\begin{aligned} f(x,y+k) &= f(x,y) + kf_y(x,y) + (k^2/2!)f_{yy}(x,y)..\,, \\ f_x(x,y+k) &= f_x(x,y) + kf_{yx}(x,y)...\,, \\ f_{xx}(x,y+k) &= f_{xx}(x,y)...\,. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Fíjate en que, cuando hay dos subíndices en una función, el primero se refiere a la última variable cambiada.

Finalmente, podemos usar los resultados de (6.11) para expandir $f(x+h, y+k)$ en potencias de h y k a la vez. Cambiando y a $y+k$ en (6.10), los primeros tres términos nos dan

$$\begin{aligned} &f(x+h,y+k) = \\ &\quad f(x,y+k) + hf_x(x,y+k) + (h^2/2!)f_{xx}(x,y+k) + \ \dots\,. \end{aligned}$$

Y ahora podemos sustituir las tres funciones de la derecha, utilizando las ecuaciones de (6.11). El resultado es

$$\begin{aligned}
&f(x+h, y+k) = \\
&\quad f(x,y) + kf_y(x,y) + (k^2/2!)f_{yy}(x,y) + \ ... \\
&\quad + h \times [f_x(x,y) + kf_{yx}(x,y) + \ ... \quad \text{(Term 2)}, \\
&\quad + (h^2/2!) \times [f_{xx}(x,y) + \ ... \quad \text{(Term 3)},
\end{aligned}$$

Para que esto quede más bonito y fácil de memorizar, podemos re-ordenarlo:

$$\begin{aligned}
&f(x+h, y+k) = f(x,y) \\
&\quad + hf_x(x,y) + kf_y(x,y) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}[h^2 f_{xx}(x,y) + 2hkf_{yx}(x,y) + k^2 f_{yy}(x,y)].
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Algunas consecuencias de todo esto

¿Qué podemos obtener de todo esto que hemos hecho? La primera consecuencia, o corolario, de todo esto, es la que sigue de (6.12): para cualquier función con buen comportamiento de dos variables independientes, el orden en que realizamos sus derivadas parciales no importa. Algebraicamente,

$$\mathsf{D}_x\mathsf{D}_y f(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \mathsf{D}_y\mathsf{D}_x f(x,y), \tag{6.13}$$

donde hemos mostrado dos notaciones distintas para las segundas derivadas. En otras palabras, los operadores D_x y D_y **conmutan**: $\mathsf{D}_x\mathsf{D}_y = \mathsf{D}_y\mathsf{D}_x$.

Esto vimos que se cumplía en el **ejemplo** que seguía a la ecuación (6.6), pero no tratamos de *demostrarlo*. Ahora sí podemos, porque cambiando el orden en que cambiamos $x \to x+h$ e $y \to y+k$, llegamos a

$$\begin{aligned}
&f(x+h, y+k) = f(x,y) \\
&\quad +hf_x(x,y) + kf_y(x,y) \\
&\quad +\tfrac{1}{2}[h^2 f_{xx}(x,y) + 2hkf_{xy}(x,y) + k^2 f_{yy}(x,y)],
\end{aligned}$$

en lugar de (6.12). Pero estos resultados han de ser idénticos a los anteriores, es decir, deben dar el mismo valor z en el mismo putno $(x+h, y+k)$; pero las dos expresiones para $f(x+h, y+k)$ difieren sólo en la derivada segunda mixta, que es $f_{yx}(x,y)$ en (6.12) y $f_{xy}(x,y)$ en la nueva expresión. Esto prueba la igualdad de (6.13).

Una segunda consecuencia concierne a la *existencia* de funciones con buen comportamiento $z = f(x,y)$, que pueden ser representadas como una superficie en la que cada par de valores x, y define un único punto a una altura z. Para tal superficie, hemos visto que, para los cambios infinitesimales $\mathrm{d}x(=h), \mathrm{d}y(=k)$,

$$\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}y. \tag{6.14}$$

La suma de los dos términos de la derecha se llama **diferencial total** de $z = f(x, y)$. Pero supongamos que el cambio en alguna cantidad está relacionado con $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ de la siguiente manera

$$\Delta = M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y,$$

donde sólo los coeficientes de $\mathrm{d}x$ y $\mathrm{d}y$ nos son dados como funciones de x e y. ¿Cómo podemos saber si Δ es el diferencial total de alguna función con buen comportamiento de las variables x, y?

Hay un método sencillo para comprobarlo; ya que si $\Delta = \mathrm{d}z$ por la ecuación (6.14) tenemos que

$$M(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad N(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Esto requiere, viendo la (6.13), que

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right), \tag{6.15}$$

siendo cada lado de la ecuación igual a la segunda derivada mixta

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right).$$

Cuando se cumplen estas condiciones, decimos que $M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y$ es un **diferencial exacto** y es equivalente al diferencial total (6.14) de alguna función con buen comportamiento $z = f(x, y)$.

Lo que todo esto significa es, si volvemos al ejemplo de la subida por la montaña en la imagen Fig.23, que podemos ir desde el punto A, a una altura $z = f(x, y)$, hasta cualquier otro punto de la superficie sin importar el camino que tomemos. Puedes ir primero un poco hacia el Norte, luego caminar mucho hacia el Este, etc. Pero es la distancia total recorrida en cada dirección la que determina la altura que alcanzas al final: z es una función *única* y de *valor único* de x e y. Este, en cambio, no sería el caso si hubiera un acantilado entre dos posibles rutas: de esta manera, con exactamente los mismo valores de x e y, podríamos estar en dos puntos a distinta altura, uno en la cima del acantilado, y otro en el fondo del barranco.En este caso, z *no* sería una función de valor único, derivable y continua.

En la Física y la Química existen cientos de ejemplos en los que alguna magnitud depende de dos o más cantidades $(x, y, \ ...)$ y el cambio total en esta magnitud depende de la "ruta" que tomemos cuando cambiemos las variables independientes. Para hacer las cosas más sencillas, normalmente tratamos de encontrar magnitudes que dependan únicamente de los valores finales de las variables de las cuales dependen. Estas funciones ndependientes del caminno trazado' son particularmente importantes. Para enonctrarlas, necesitaremos las conclusiones obtenidas en esta sección.

6.2. Las ecuaciones diferenciales

Ya nos hemos encontrado algunos tipos de **ecuaciones diferenciales**, en las cuales tenemos una relación entre una función $y = f(x)$ y sus derivadas $f'(x) = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x, f''(x) = \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$, etc.; y para *solucionarlas* teníamos que encontrar la forma de la función que satisfaciese la relación dada. No hay suficiente sitio en un único capítulo de un pequeño manual para hablar demasiado sobre este tipo de ecuaciones, por lo que tendremos que contentarnos con unos pocos ejemplos sencillos.

Ecuaciones de primer orden

En el Capítulo 2, la velocidad v de un cuerpo en caída libre era una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a \quad (a = \text{aceleración de la gravedad}).$$

En este caso la aceleración a, que normalmente denotamos por g, se considera constante. Es la tasa de incremento de v con el tiempo t, y la solución de la ecuación es $v = v_0 + at$, donde v_0 es otra constante. Puedes comprobar esto derivando, con lo que obtendrás $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = a$. Y puedes ver lo que la constante v_0 significa aplicando $t = 0$ en tu solución, que nos da $v = v_0$ para $t = 0$ (esto es, el tiempo en el que comienza la caída, que hemos considerado 0).

Esta ecuación diferencial es de **primer orden** porque contiene sólo una *primera derivada*; y la **solución general** contiene *una* constante (v_0). Una solución *particular* sigue si elegimos esta constante para que satisfaga una **condición de contorno**, que en este caso es $v = v_0$ – en el límite ('contorno') de la variable tiempo ($t = 0$ en el comienzo del movimiento).

Otra ecuación diferencial de primer orden que nos hemos encontrado con anterioridad es la que define a la función exponencial. Si $y = e^x$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^x = y.$$

Esta función describe el crecimiento de una población (Sección 1.4 del Capítulo 1) cuando reemplazamos las variables x e y por n (número de generaciones, equivalente al tiempo) y N (número total de personas en un determinado tiempo t). En la ecuación (1.9) la solución que obtenemos es

$$N = N_0 \exp(cn)$$

y si ésta la derivamos con respecto a n obtendremos

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}n} = cN_0 \exp(cn) = cN.$$

Esta parece algo más dfiícil. $\mathrm{d}N/\mathrm{d}n = cN$ no nos da la derivada en función de la variable independiente n, así que con la notación usual, se leerá $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = cy$. Pero continúa siendo una ecuación de primer orden y la solución general contiene una constante, N_0, la cual necesitaremos fijar a partir de una condición de contorno: en el comienzo, cuando $n = 0$, el número de personas total será de $N = N_0 e^0 = N_0$, así que hemos fijado la constante para obtener una solución particular correcta. [Necesitas al menos dos, pero teniendo millones, !puedes olvidarte de ello por ahora!] La otra constante c te será dada de manera exerna, como la g en el primer ejemplo, es parte del problema – no la solución.

Ecuaciones de segundo orden

Una ecuación diferencial de **segundo orden** es aquella que contiene segundas derivadas. Su forma general es

$$\frac{d^2y}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y = r(x), \tag{6.16}$$

donde $p(x), q(x), r(x)$ son funciones dadas de la variable independiente x, e $y = f(x)$ es la solución general requerida. Si la función $r(x)$ de la derecha es cero, entonces las llamamos **homogéneas**, y en caso contrario, **no homogéneas** y las soluciones son de dstinto tipo. En esta introducción las mantendremos del tipo simple, con $r(x) = 0$ y con los coeficientes $p(x), q(x)$, y $r(x)$ *constantes*. Veremos ejemplos de la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + by = c, \tag{6.17}$$

la cual es una ecuación **lineal con coeficientes constantes**. La ecuación más simple de este tipo es $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 =$ constante, con la cual nos encontramos en la ecuación (2.2) y formalizamos verbalmente al comienzo de esta Sección: la velocidad de un cuerpo en caída libre aumenta a una tasa constante. Tomaremos esto como nuestro primer ejemplo, entrando para ello en un poco más de detalle.

Ejemplo 1. Caída libre – y paracaídas

En el lenguaje del cálculo, $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = g$ (aceleración de la gravedad); y como $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, donde s es la distancia caída en un tiempo t, la ecuación básica se convierte en

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = g. \tag{6.18}$$

En la ecuación (2.4) del Capítulo 2, encontramos una solución, $s = f(t)$, mediante un método gráfico: reescribiéndola con la nueva notación, nos quedaría $s = \frac{1}{2}gt^2$. Para asegurarnos de que esta función efectivamente cumpla (6.18) tan sólo hemos de derivarla dos veces, para obtener primero $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = \frac{1}{2}g \times 2t = gt$, y después $\mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2 = g$. Pero esta no puede ser la solución *general*, ya que una ecuación de segundo grado deberá tener uan ecuación con dos constantes arbitrarias – y aquí no tenemos ni tan siquiera una.

Para obtener la solución general sólo tenemos que recordar que cada vez que derivamos perdemos una constante; así que cuando derivamos $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ $(= v)$ podíamos haber añadido una constante (llamémosla v_0, ya que tiene las unidades de la velocidad – 'distancia partido por tiempo') que hubeira desaparecido en el proceso.

Podríamos reemplazar v por $v + v_0$ y el resultado todavía satisfacería la misma ecuación diferencial. Lo mismo es cierto para la distancia caída, s, si cambiamos s por $s + s_0$. Por lo que la solución *general* parece ser

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2 \tag{6.19}$$

y es fácil comprobar que esto también satisface (6.18). Las constantes claramente corresponden a *condiciones de contorno* paticulares para $t = 0$. Si tomamos $t = 0$ como el instante en que dejamos al cuerpo caer, entonces $s = s_0$ es la distancia en el comienzo de la caída (desde donde quiera que la midamos). Y como $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = v_0 + gt$ está claro que $v = v_0$ cuando $t = 0$ – es la velocidad 'inicial'. Si dejamos al objeto caer desde el *reposo*, en una posición $s_0 = 0$, entonces $s = \frac{1}{2} g t^2$ es la solución *particular* de (6.18) que corresponde a estas condiciones de contorno.

Pero, ¿es la expresión (6.18) realmente correcta? – porque la solución implica que la velocidad de cualquier cuerpo en caída libre aumentará infinitamente, tomando valores tan grandes como quieras, si esperas lo suficiente. Esto no es lo que ocurre en la realidad, así que esta ecuacií no debe ser totalmente correcta. De hecho, es sólo una aproximación, ya que deja fuera cualquier otra fuerza que se *oponga* a la gravedad, y que por tanto, *reduzca* la velocidad de caída. En lugar de (6.18), realmente deberíamos usar

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv, \tag{6.20}$$

donde la constante k depende de a través de qué fluido esté cayendo el cuerpo. El nuevo término, $-kv$, es proporcional a la velocidad (se duplica si duplicamos v), y tiene signo negativo porque actúa *en contra* de la gravedad, tratando de *reducir* la tasa de caída. Para un cuerpo que caiga a través del aire, k normalmente se deprecia. Pero sigue estando ahí, como habrás comprobado si alguna vez has saltado a un río desde un puente alto: cuando caes, cada vez más rápido, puedes sentir el aire rozando contigo para frenarte – pero k no es suficientemente grande y te chocas contra el agua provocando una gran salpicadura. Si en lugar del puente saltases desde un avión o helicóptero, más te vale llevar un paracaídas contigo: se llena con aire, como un paraguas cuando hace viento, y frena tu caída hasta que tocas el suelo con una velocidad muy reducida. Te da un valor de k mucho mayor. Y ahora ya entiendes por qué esto es importante, y por qué queremos resolver (6.20).

Para obtener una solución de esta ecuación vayamos primero a por la velocidad, dando la vuelta a la ecuación para que nos quede

$$\frac{1}{g - kv} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 1. \tag{6.21}$$

Si eres muy avispado, te habrás dado cuenta de que esto se conecta con lo que aprendimos en la Sección 4.3: puedes *integrar* la ecuación, con respecto al tiempo, escribiendo

$$\int \frac{1}{g-kv}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = t, \tag{6.22}$$

y más tarde solucionando la integral

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{g-kv} = -\frac{1}{k}\log(g-kv).$$

(Utiliza la integral estándar dada en (4.24) tomando $((g-kv)=u)$). Otra manera de solucionar (6.21) es darle la vuelta usando (4.24): en este caso se convierte en $\mathrm{dt/dv = 1/(g - kv)}$ y la integración nos da

$$t = \int \frac{\mathrm{d}v}{(g-kv)} = \int \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u = -\frac{1}{k}\log u$$

– exactamente lo mismo que antes.

Poniendo este resultado en (6.21) obtenemos $t = -(1/k)\log u$, o (ya que la integración siempre nos da una constante arbitraria, C)

$$t = -(1/k)\log(g-kv) + C.$$

Esta constante está fijada por las condiciones de contorno: en $t = 0$ suponemos que el cuerpo cae desde el reposo ($v = v_0 = 0$). Así que $C = (1/k)\log g$; y en un tiempo posterior t tenemos que

$$kt = \log g - \log(g-kv) = \log\left(\frac{g}{g-kv}\right),$$

ya que $\log A - \log B = \log(A/B)$.

El resultado final queda más claro en forma exponencial:

$$(k/g)v = 1 - e^{-kt}. \tag{6.23}$$

Esto satisface las condiciones de contorno, porque con $t = 0$ tenemos $v = v_0 = 0$ (comenzando desde el reposo), y predice una **velocidad terminal**

$$v_T = g/k, \tag{6.24}$$

cuando t toma valores infinitamente grandes. Esto es lo que necesitas calcular si estás diseñando paracaídas: ¿Cómo de grande debe ser la constante k para garantizar un aterrizaje seguro? Puedes también calcular cómo de lejos caerás, integrando la velocidad, v $(= \mathrm{d}s/\mathrm{d}t)$, dada en (6.23). ¡Piensa en ello!

Ejemplo 2. Péndulo simple

Cerca del principio del Manual 1 hemos hablado de medir cosas y, en particular, del **tiempo**. Todos hemos visto alguna vez relojes de péndulo, donde un cuerpo pesado cuelga de una cuerda, o palo, que se balancea de lado a lado. Cada doble balanceo del péndulo (un balanceo hacia delante y otro hacia atrás) marca una 'unidad de tiempo' y si queremos saber cuánto tarda algo en ocurrir, tan sólo contamos el *número de balanceos* del péndulo que se dan mientras ese algo ocurre: y esto es lo que hace el reloj cuando te da t como un número de unidades (segundos, minutos y horas).

El péndulo es un ejemplo de **oscilador** y el tiempo que tarda en hacer una oscilación completa se llama **periodo**. Para hacerlo oscilar, has de desplazar la punta una distancia, y digamos, desde su **posición de equilibrio** en la que está durante el reposo, después lo sueltas, y el péndulo oscila. Su movimiento puede ser descrito por una ecuación diferencial de segundo orden (ten en cuenta que la variable independiente es t y que el desplazamiento y depende de t):

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 y, \tag{6.25}$$

donde ω ('omega' es el símbolo que generalmente se utiliza para hablar de velocidad de oscilación) es una *constante* y el signo 'menos' significa que la velocidad lado a lado del péndulo ($\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$) es siempre hacia la posición de equilibrio, en la que $y = 0$. Buscaremos la solución general de esta ecuación, pero primero miremos a resultados obtenidos anteriormente en este mismo capítulo para ver si tenemos alguna función que nos pueda dar soluciones ya listas.

La Tabla 1 de la Sección 4.1 tiene varios resultados clave. En ella encontramos que si $y = \sin x$ entonces $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \cos x$; y si $y = \cos x$ entonces $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -\sin x$. Y estos resultados se pueden extender fácilmente a $y = \sin ax,\ y = \cos ax$. Por tanto, realizando un cambio de variable $ax = u$ y aplicando (2.22), obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin ax = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\sin u \times \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos u \times a = a\cos ax,$$

y un resultado similar para $y = \cos ax$. Juntándolos,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin ax = a\cos ax, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos ax = -a\sin ax. \tag{6.26}$$

Ahora haz las dos derivaciones, una tras otra, para obtener

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin ax = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a\cos ax) = a(-a\sin ax).$$

Esto siginifica que si derivas la función $y = \sin ax$ dos veces con respecto a la variable x, recuperas la *función original*, multiplicada por $-a^2$. Y ocurre lo mismo para la función $y = \cos ax$:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin ax = -a^2\sin ax, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\cos ax = -a^2\cos ax.$$

En la ecuación diferencial que buscamos resolver, (6.25), la variable independiente era t (en lugar de x) y el desplazamiento y era una función de t. Con esta notación, las últimas dos ecuaciones nos quedan

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sin at = -a^2\sin at,\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\cos at = -a^2\cos at\end{aligned} \tag{6.27}$$

y dan dos soluciones de (6.25). Si sustituimos $a = \omega$ las soluciones serían

$$y_1 = \sin\omega t, \qquad y_2 = \cos\omega t. \tag{6.28}$$

Pero nosotros buscamos una solución *general*, con dos constantes arbitrarias – ¿cuáles son? Está claro que cualquier solución en (6.28) puede multiplicarse por una ocnstante, llamémosla A o B, y seguirá siendo una solución válida. Para comprobar esto, es suficiente con reescribir la ecuación original en la forma

$$\mathbf{L}y = \mathsf{D}^2y + \omega^2 y = 0, \tag{6.29}$$

donde $\mathbf{L} = \mathsf{D}^2 + \omega^2$ es un **operador lineal**, y si y es una solución, también lo será Ay. De manera aún más general, si y_1 e y_2 son dos soluciones, también lo será $y = Ay_1 + By_2$; ya que

$$\mathbf{L}y = \mathbf{L}(Ay_1 + By_2) = A(\mathbf{L}y_1) + B(\mathbf{L}y_2) = A\times 0 + B\times 0.$$

Y así tenemos la solución general:

$$y = A\sin\omega t + B\cos\omega t. \tag{6.30}$$

Recuerda que las funciones seno y coseno, que definimos mediante series en (1.6), tienen la forma vista en la Fig.6: cuando el argumento de la función, ωt, aumenta en 2π, el valor de la función comienza a repetirse, y el **ciclo** de todos los distintos valores se ha completado. El **periodo** T se define por tanto como $\omega T = 2\pi$, mientras que la **frecuencia** 'nu' de la oscilación – el número de oscilaciones completas por unidad de tiempo – es $\nu = 1/T$: por ello

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \qquad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{6.31}$$

Ejemplo 3. Creando música

Multitud de instrumentos musicales forman su sonido a partir de las **vibraciones** de una cuerda fuertemente estirada, la cual se puntea (tirando hacia de ella hacia un lado y más tarde soltándola) o se frota (por ejemplo, con un arco). La forma de la cuerda vibrante puede ser, por ejemplo, como la de la Fig.25:

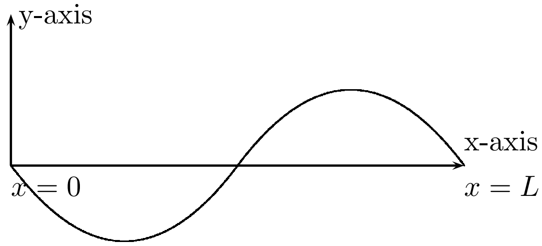


Figure 25

Pensemos en una cuerda de longitud L, estirada entre sus dos extremos: si la punteas, y esperas a que estabilice, vibrará produciendo un sonido.

Aquí los extremos de la cuerda están fijos en $x = 0$ y $x = L$ y el desplazamiento $y = f(x)$ está magnificado. ¿Pero qué ocurre con el tiempo t? Esta vez no vamos a tener otra ecuación diferencial corriente, sino una ecuación diferencial *parcial*; porque el desplazamiento y en un punto x sobre la cuerda dependerá también de t a medida que la cuerda vibra hacia arriba y abajo. Necesitaremos una ecuación para determinar $y = f(x,t)$, que es una función de *dos* variables.

La ecuación que necesitamos parece ser sencilla. El desplazamiento y, para cada punto x, varía con el tiempo siguiendo la ecuación (en la que hemos utilizado ∂ en lugar de d ya que hay *dos* variables, x, y, además de t):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{6.32}$$

Aquí c^2 es una constante positiva (por ello la hemos escrito como un cuadrado), que depende de cuánto estires la cuerda, y de su *peso*. A mayor tensión (cuanto más estires) de la cuerda, más rápido vibra ésta; en cambio, cuanto más pesada sea, se moverá más lento. Esto lo veremos más claro en el Manual 4, pero por ahora sólo buscaremos una solución para (6.32) que es una "ecuación diferencial parcial de segundo orden con dos variables". Nada menos.

La Fig.25 sugiere que, incluso cuando vibra, la cuerda podrá tener una cierta 'forma' $y = y(x)$ en cualquier instante. ¿Podemos encontrar soluciones *particulares*, en las cuales la cuerda mantiene su forma y simplemente se mueve hacia arriba y abajo? – siendo el desplazamiento en cualquier punto mayor o menor a medida que t cambia. Para ver si esto es posible tratemos de buscar una solución de la forma

$$y(x,t) = F(x)T(t). \tag{6.33}$$

Este es un ejemplo de 'separación de variables', que es generalmente útil para resolver ecuaciones diferenciales parciales, a pesar de que no suele llevar a una solución *general*.

Ahora sustituye (6.33) en (6.32) y observa qué ocurre. Tenemos que encontrar las dos funciones, $F(x)$ y $T(t)$, tales que

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}x^2}\right)T(t) = \frac{1}{c^2}F(x)\left(\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}\right), \tag{6.34}$$

donde hemos utilizado derivadas *normales* en lugar de parciales, porque hemos derivado funciones de *una* variable, como $F(x)$ y $T(t)$.

Esto, sin embargo, no parece más sencillo que antes. Pero divide ambos lados de la ecuación entre $F(x)T(t)$ y obtendrás

$$\frac{1}{F}\left(\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}x^2}\right) = \frac{1}{c^2T}\left(\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}\right), \tag{6.35}$$

donde todo el lado izquierdo depende únicamente de x y todo el derecho depende sólo de t. ¿Cómo es esto posible? Si ambos lados fueran iguales en un determinado momento, podríamos esperar un tiempo t, y volver a mirar la ecuación, y sólo el lado derecho habría cambiado – ¿así que cómo pueden permanecer los dos lados iguales?

La ecuación (6.35) puede seguir cumpliéndose si separamos ambos lados y los igualamos ambos a una misma **constante de separación** C, que no dependa ni de x ni de t. De esta manera, hemos "separado las variables" y tenemos una ecuación para determinar $F(x)$ y otra ecuación independiente para determinar $T(t)$.

La ecuación para $T(t)$ es

$$\frac{1}{T}\left(\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}\right) = Cc^2,$$

donde la constante de separación aparece a la derecha. Esta última ecuación tiene exactamente la misma forma que (6.25) si consideramos $Cc^2 = -\omega^2$; así que ya tenemos la solución para el factor tiempo T: lo tenemos ya en la (6.30) como

$$T(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t. \tag{6.36}$$

Además, no necesitamos mantener ambos términos ya que realmente son la misma función, que oscila hacia arriba y abajo cuando cambiamos t moviéndonos por el eje del tiempo. En la Fig.25, podemos ver una oscilación que comienza en $y = 0$ cuando $t = 0$ (los valores t están representados horizontalmente, en el eje de abscisas) y si medimos los valores del tiempo desde ese punto, los valores del seno nos son suficientes: el coseno es exactamente igual, solo que está desplazado en el eje t de tal manera que da $y = B$ para $t = 0$ – lo cual no queremos.

La expresión de la izquierda en (6.34), igualada a la misma constante de separación C, nos proporciona la ecuación para determinar $F(x)$:

$$\frac{1}{F}\left(\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}x^2}\right) = C = -(\omega/c)^2$$

y, al igual que antes, la solución general será una combinación de dos términos: $\sin(\omega/c)x$ y $\cos(\omega/c)x$. En este caso también, no nos es necesaria esta solución general, ya que $y = 0$ en los dos límites de la cuerda donde $x = 0$ y $x = L$: el término del coseno no encaja ya que $\cos 0 = 1$, por lo que la solución debe ser de la forma $F(x) = \sin(\omega/c)x$. Y esto debe ser cero cuando $x = L$. Estas *condiciones de contorno* son muy importantes: la función seno sólo puede ser cero para valores de su argumento ($(\omega/c)x$) que sean múltiplos enteros de π. Así que las únicas funciones aceptables $F(x)$ deben cumplir $\omega L/c = n\pi$ donde n es un entero. Por lo tanto la función $F(x)$, que determina la 'forma' de la cuerda vibrante, debe ser de la forma $F(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x$. Y si incluimos el factor tiempo, el primer término de (6.36), entonces nuestra solución particular quedará de la siguiente forma

$$y(x,t) = A\sin(\omega/c)x\sin\omega t = A\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)ct. \tag{6.37}$$

Donde A es una constante arbitraria llamada **amplitud** de la vibración: y como la función seno toma valores comprendidos siempre entre $+1$ y -1, el desplazamiento de cualquier punto de la cuerda debe siempre estar entre $\pm A$.

Esta solución nos cuenta todo lo que debemos saber sobre una cuerda que vibra. El periodo y la frecuencia se pueden obtener a partir de la (6.31), si sustituímos $\omega = (n\pi c/L)$ nos queda

$$T = \frac{2L}{nc}, \qquad \nu = \frac{nc}{2L}. \tag{6.38}$$

Fíjate en que hay una solución para cada valor entero $n = 1, 2, 3, ...$ y que estas soluciones alternativas surgen como resultado de las *condiciones de contorno*, $y = 0$ en los dos extremos de la cuerda ($x = 0, x = L$) en los que está fija. La vibración indicada en la Fig.25 corresponde a $n = 2$ y en general n indica el número de 'medias ondas' que pueden encajarse en la cuerda. El 'modo de vibración' para un valor dado de n es el llamado "$n$ésimo modo normal". Para $n = 1$ se llama "fundamental", mientras que a mayores valores de n los llamamos "armónicos". Si punteas una cuerda cerca de su mitad, el sonido que obtendrás será parecido al fundamental, mientras que si te alejas del centro, se producirá un sonido como mezcla de armónicos. La frecuencia del sonido también puede manipularse si estiramos más la cuerda, o si usamos una más pesada, lo que variaría el valor de c. Todo esto son factores a tener en cuenta para el diseño de instrumentos musicales.

6.3. Las autofunciones

El ejemplo 3 de la última sección introdujimos un importante concepto nuevo, que nos abre todo un nuevo campo de las matemáticas. Una ecuación diferencial que contiene un parámetro (como la constante de separación C o la constante relacionada ω), y que tiene soluciones *únicamente para ciertos valores especiales del parámetro*, se denomina

Una mirada hacia atrás

En el Manual 3 hemos aprendido cómo podemos utilizar las matemáticas para describir las **relaciones** entre magnitudes que podríamos necesitar para realizar medidas. Por ejemplo, cómo la distancia s que nos desplazamos puede depender del tiempo t que nos lleva el hacerlo, y cómo podemos expresar esto mediante el lenguaje de las matemáticas escribiendo $s = f(t)$. Mediante palabras, esto se expresa diciendo que "s es **función** de t", donde f es el nombre que damos a la regla que nos indica cómo obtener el valor de s para cualquier valor dado de t.

- El capítulo 1 vimos que hay tres formas de describir una relación $y = f(x)$: (i) elaborando una **tabla** que muestre los valores elegidos para la **variable independiente** x y los valores correspondientes a la **variable dependiente** y; (ii) 'dibujando'los pares de valores (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$ para conseguir una **gráfica** de la relación; o (iii) utilizando funciones matemáticas 'estándar', tales como $y = x^n$, $y = \sin x$, $y = e^x$, etc. Además, aprendimos algunas nociones sobre las funciones estándar más sencillas y la forma que presentan sus representaciones gráficas.

- En el capítulo 2, nos hemos encontrado con todas las ideas principales del **cálculo infinitesimal**: la **diferenciación**, para determinar cuán rápido cambia la función $y = f(x)$ cuando x varía, y la **integración**, para hallar el área bajo la curva $y = f(x)$ entre los límites x_1 y x_2. Además, sabemos lo que todo esto significa y cómo podemos utilizarlo. El resultado de derivar $y = f(x)$, que se escribe $dy/dx = f'(x)$, es la **derivada** de la función, que es a su vez una nueva función de x.

- En el capítulo 3, nos centramos en las derivadas de ciertas funciones estándar y fuimos capaces de derivar *cualquier cosa* que pudiésemos expresar en términos de dichas funciones (como sumas, productos, etc.).

- En el capítulo 4 nos detuvimos en el problema de la *integración* de cualquier función dada, que es más complicado debido a que no existe una regla sencilla y hay que utilizar 'trucosésspeciales. Sin embargo, la integración es tan útil que necesitamos saber cómo hacerla incluso si no podemos encontrar un truco para ello. En tal caso, encontramos métodos *numéricos* que requieren únicamente una tabla de valores de x e y y nos dan lo que necesitamos mediante aritmética simple.

- En el capítulo 5 regresamos a las **series de potencias**, mediante las cuales una función dada puede representar de la forma $y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$. El **teorema de Taylor** nos mostraba cómo elegir los coeficientes que acompañan a cada potencia de x.

- Finalmente, en el capítulo 6, echamos un vistazo a algunas cosas que no se suelen ver normalmente antes de ir a la Universidad. Aún no las necesitaremos, pero cuando ello ocurra, serán como 'viejos amigos'(no más difíciles de lo que hemos estado haciendo hasta ahora).

Índice