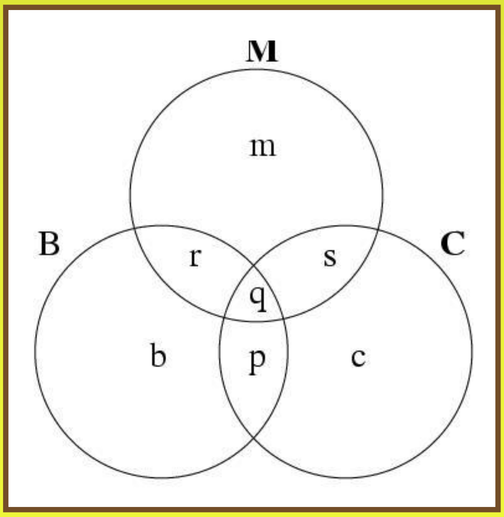
Libros Básicos de Ciencia

Libro 1

Números y símbolos: Del cálculo simple al álgebra abstracta



Roy McWeeny

LIBROS BÁSICOS DE CIENCIA

Una colección que comienza *desde lo más elemental*

Libro 1. Números y símbolos: Del cálculo simple al álgebra abstracta

Roy McWeeny
Profesor Emérito de Química Teórica, Universidad de Pisa, Pisa (Italia)

Traducido del original en inglés por Ángel S. Sanz Ortiz
Instituto de Física Fundamental "Blas Cabrera", CSIC, Madrid (España)

Todos los libros de la colección son de *distribución totalmente gratuita* y están disponibles en la red, visitando los sitios *web*:

www.paricenter.com (en 'Basic Books in Science')

www.learndev.org (en 'For the Love of Science')

LIBROS BÁSICOS DE CIENCIA

Sobre esta colección

Todo progreso humano depende de la **educación**, y para conseguirlo necesitamos libros y centros de enseñanza. La Educación Científica es una de las grandes piezas clave del progreso.

Desgraciadamente, no siempre es sencillo disponer de libros y centros de enseñanza. No obstante, con ayuda de la tecnología moderna, hoy en día todo el conocimiento acumulado a nivel mundial está al alcance de cualquiera a través de los enormes bancos de datos disponibles en la Red (la 'red' que conecta los ordenadores de todo el mundo).

La colección "Libros Básicos de Ciencia" está orientada a explotar esta nueva tecnología, poniendo al alcance de cualquier persona el conocimiento básico en todas las áreas de la ciencia. Cada libro cubre, con cierto grado de profundización, un área bien definida, partiendo de los conocimientos más básicos y alcanzando un nivel de acceso a la Universidad, y se encuentra a disposición totalmente gratuita en la Red, *sin coste alguno para el lector*. Para obtener una copia debería ser suficiente con hacer una visita a cualquier biblioteca o lugar público donde haya un ordenador personal y una línea telefónica. Cada libro servirá, así, como uno de los "bloques" sobre los que se construye la Ciencia, y todos juntos constituirán una biblioteca científica 'de ganga'.

Sobre este libro

Este libro, al igual que los otros de la colección, está escrito en un inglés sencillo[1], elegido únicamente porque es el lenguaje más ampliamente utilizado en la ciencia, la tecnología, la industria, el comercio, los negocios o los viajes internacionales. Su tema de estudio, "los números y los símbolos", es fundamental en toda las ciencias, pues introduce un *lenguaje nuevo*, diferente del que utilizamos cada día para escribir o para hablar. En la evolución del lenguaje, primero apareció la palabra hablada y después la palabra escrita (hace unos cuatro mil años). Las Matemáticas comenzaron su desarrollo algo más tarde —en China, India y los países alrededor del mar Mediterráneo. Sin embargo, los símbolos matemáticos, aunque también son trazos sobre un papel, no están relacionados con ninguna forma de hablar, sonido o palabra escrita. Normalmente representan *operaciones*, tales como contar o desplazar objetos a través del espacio, que a menudo se realizan únicamente de forma

[1] El libro que tienes delante es una traducción al español del original, en inglés.

mental. Esta naturaleza *abstracta* o *simbólica* de las Matemáticas es la que les hace parecer difíciles a tanta gente y las separa de una gran parte de la ciencia.

El objetivo de este primer libro de la colección es abrir la puerta de las Matemáticas y preparados para penetrar en la Física, la Química y otras Ciencias.

Un vistazo previo

Estás comenzando un largo viaje. Un viaje de descubrimiento que te llevará desde los tiempos remotos, cuando las personas aprendieron los primeros lenguajes y el modo de compartir, unos con otros, sus ideas mediante el habla y la escritura, hasta hoy día.

La Ciencia comenzó a desarrollarse hace sólo unos pocos miles de años, con el estudio de las estrellas del cielo (lo que dio lugar a la **Astronomía**) y la medida de las distancias para dividir la tierra y navegar por el mar (lo que dio lugar a las **Matemáticas**). Con lo que sabemos actualmente, este viaje puede realizarse en un corto período de tiempo. Sin embargo, aún así, es el mismo viaje (repleto de sorpresas) y cuanto más lejos vayas, más comprenderás el mundo a tu alrededor y cómo funciona. A lo largo del camino hay muchos 'hitos' importantes:

- Tras los primeros dos capítulos de este libro, sabrás cómo trabajar con números, yendo desde la **operación** de contar hasta varias formas de **combinar** números, como sumar y multiplicar. Además, habrás aprendido que otros símbolos (como las letras del alfabeto) pueden utilizarse para representar *cualquier* número. Por ejemplo, $a \times b = b \times a$ es una forma de decir que multiplicar un número a por otro b es exactamente lo mismo que multiplicar b por a, cualesquiera que sean los números representados por a y b. Las Matemáticas son precisamente *otro lenguaje*.

- En el capítulo 3 verás cómo preguntas que *parecen* no tener una respuesta pueden tenerla *inventando* nuevas clases de números: los **números negativos** y las **fracciones**.

- Finalizado el capítulo 4 serás capaz de utilizar el **sistema decimal** y comprender su significado para todos los **números racionales**.

- En el capítulo 5 pasarás dos hitos más. Tras el primero, habrás ido de los números racionales al 'campo' de *todos* los **números reales**, incluyendo aquellos que caen *entre* los números racionales y se denominan 'irracionales'. El segundo gran avance te llevará al campo de los **números complejos**, que puede ser descrito sólo si defines un número completamente nuevo representado por el símbolo i, que posee la extraña propiedad de que $i \times i = -1$. Siempre que nos ciñamos a las reglas establecidas hasta aquí, ya no habrá más números nuevos.

- Pero no hemos terminado; ¡los seres humanos son animales muy creativos! El último capítulo muestra cómo podemos extender el uso de los símbolos para incluir operaciones bastante diferentes de las que hemos empleado hasta ahora.

CONTENIDO

Capítulo 1 Sobre los números

1.1 ¿Por qué necesitamos los números?

1.2 Contar: los números naturales

1.3 Un nombre para los números

Capítulo 2 Combinando números

2.1 La suma

2.2 La multiplicación

Capítulo 3 Inventando números nuevos: las ecuaciones

3.1 Números negativos y ecuaciones sencillas

3.2 Una representación para los números: los vectores

3.3 Más números nuevos: las fracciones

Capítulo 4 El sistema decimal

4.1 Las fracciones racionales

4.2 Las potencias y sus propiedades

4.3 Números decimales interminables

Capítulo 5 Números reales y números complejos

5.1 Los números reales y las series

5.2 El campo de los números complejos

5.3 Ecuaciones con soluciones complejas

Capítulo 6 Más allá de los números: los operadores

6.1 Simetrías y grupos

6.2 Clasificando objetos en categorías

6.3 Discutiendo con símbolos: la lógica

Notas para el lector

Cuando los capítulos tienen varias secciones, éstas se enumeran de manera que, por ejemplo, "sección 2.3" significa "sección 3 del capítulo 2". Igualmente, "ecuación (2.3)" significa "ecuación 3 del capítulo 2".

Las palabras 'clave' importantes aparecen impresas en letra **negrilla** cuando se utilizan por primera vez. Estos términos se han recopilado en el índice al final del libro.

Capítulo 1

Sobre los números

1.1. ¿Por qué necesitamos los números?

En las ciencias 'físicas' o 'exactas' nos ocupamos de las **magnitudes** y la manera en que éstas se relacionan; no es suficiente saber qué magnitudes 'son', también debemos ser capaces de **medirlas**. Medir una magnitud significa que debemos compararla con una cierta 'unidad' y decidir *a cuántas unidades* equivale dicha magnitud (siguiendo cierto acuerdo). Si estoy andando, podría querer saber *cuán lejos está* el colegio. Esa magnitud es la **distancia**. Si observo que ésta requiere mil 'pasos' o 'zancadas', mi zancada será la unidad de distancia y un millar de estas será la distancia al colegio. Otro ejemplo: si digo que una habitación tiene tres metros de ancho, la unidad es el metro y tres varas de un metro, puestas una a continuación de otra, cubrirán la distancia que hay de un extremo a otro de la habitación. El metro es la *unidad estándar de longitud* —la de aquélla de una 'vara de medir' especial que se guarda en París desde 1791. Las varas de medir estándar se han utilizado durante miles de años, mucho antes de que se escribiesen los libros de historia. Una de las más comunes era el 'codo', que equivale aproximadamente a medio metro. En Egipto se han encontrado muchas varas de un codo, que se utilizaron para medir las piedras con las que se construyeron las grandes pirámides. Sin embargo, no fue hasta 1875 cuando el 'sistema métrico', basado en el metro, se aceptó (mediante acuerdo internacional) como sistema estándar de medida en ciencia.

Puede hacerse cualquier número de copias del metro estándar utilizando una barra corriente. Si los dos extremos de la barra pueden alinearse con los del metro estándar, como en la Fig. 1(a), entonces aquélla también tendrá la misma longitud que la unidad estándar. Cuando se coloquen tres de estas

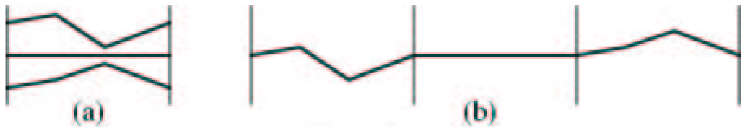


Figura 1

barras, una a continuación de otra, como en la Fig. 1(b), éstas alcanzarán los dos extremos de la habitación, cuya anchura será *igual* a tres metros. Observa que la anchura (o longitud) es la *distancia entre* dos objetos. Así, la anchura, la longitud y la distancia se miden con las mismas unidades; lo mismo sucede con la altura (cuán alta es la habitación).

La misma idea se emplea para medir magnitudes de cualquier tipo. Debemos llegar a un compromiso sobre la *unidad*, sobre cómo podemos *combinar* dos magnitudes similares y sobre cuándo éstas son *equivalentes* (o *iguales*). Las ideas de **unidad**, **combinación** y **equivalencia** (o *igualdad*) están siempre presentes. Para la longitud la unidad es el metro estándar; las longitudes de dos objetos se combinan colocando uno a continuación del otro, como en la Fig. 1(b), y dos objetos tienen la misma longitud cuando 'cubren la misma distancia' (por ejemplo, tres barras de un metro o una única barra de tres metros).

Otra magnitud importante es la **masa** de un objeto. Ésta puede medirse poniendo el objeto sobre el platillo de una 'balanza', como las que puedes encontrar en el mercado [Fig. 1(c)]. La unidad de masa es el **kilogramo**, que también se guarda en París. La abreviatura para esta unidad es 'kg'. El nombre que recibe el sistema internacional de unidades, basado en el metro (para la longitud), el kilogramo (para la masa) y el segundo (para el tiempo), solía denominarse 'sistema MKS'. Sin embargo, en la actualidad, se conoce como Sistema Internacional y es el que se utiliza en todas las Ciencias de forma universal.

Cuando se deposita un kilogramo estándar sobre el platillo de la balanza, éste hace que la aguja se desplace a una nueva posición, que aparece marcada como "1 kg" en la Fig. 2(b). Si quitamos la masa estándar y colocamos en su lugar un trozo de arcilla, ésta tendrá también una masa de un kilogramo cuando haga que la aguja se desplace exactamente a la misma posición que en el caso anterior. (Por supuesto, el trozo de arcilla podría no dar exactamente el mismo resultado. Sin embargo, añadiendo o quitando un poco de arcilla podemos obtener el resultado correcto.) En tal caso, tendremos *dos* masas unidad: el kilogramo estándar y nuestro trozo de arcilla de un kilogramo.

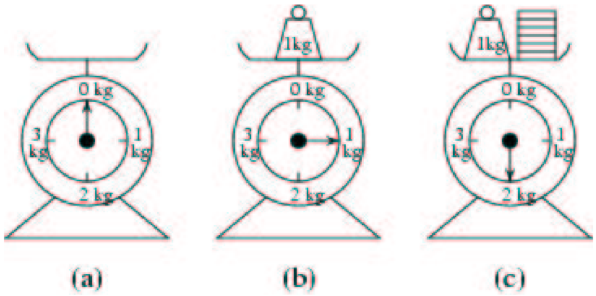


Figura 2

Coloquemos *ambos* sobre el platillo de la balanza, como en la Fig. 2(c), y observemos la nueva posición de la aguja. Ésta señala "2 kg" en la escala. Colocar ambas masas juntas sobre el platillo de la balanza y considerarlas como un nuevo objeto único es una forma de combinar masas. Retira ahora ambas masas y, en su lugar, coloca un trozo de arcilla más grande sobre el platillo de la balanza. Si éste desplaza la aguja a la misma posición ("2 kg"), entonces tendrá una masa de *dos* kilogramos. En este ejemplo vemos que *combinar* masas significa 'ponerlas juntas sobre el mismo platillo de la balanza' e *igualdad* entre dos masas, que ambas 'desplazan la aguja a la misma marca'. (Más tarde veremos la diferencia entre masa y 'peso' —que es lo que mide una balanza— pero esto será en el libro 4. En la vida diaria todavía comparamos las masas de dos objetos pesándolos).

Finalmente, reflexionemos sobre el **tiempo**. El tiempo puede medirse utilizando un péndulo —un pequeño objeto pesado suspendido de un soporte mediante una cuerda. Cada balanceo completo (u oscilación) del péndulo, es decir, una ida y una venida, requiere de un cierto tiempo. Como cada balanceo parece ser igual a cualquier otro, podemos suponer además que todos duran el mismo tiempo, lo que puede utilizarse como *unidad*. La unidad estándar de tiempo es el 'segundo' (medido con un péndulo estándar) y la *combinación* de dos unidades de tiempo significa 'esperar a que se produzca otro balanceo tras el anterior'. Con un péndulo estándar, sesenta balanceos son 'minuto'.

Por ahora queda claro, por tanto, que medir cosas significa saber contar y conocer los números.

1.2. Contar: los números naturales

Por supuesto, sabes contar. Sin embargo, ¿has pensado alguna vez seriamente sobre ello? Hay dos formas de llegar a la idea de *número*. Cuando digo “hay ‘cinco’ vacas en ese prado” quiero decir:

> He asignado nombres a las vacas, una tras otra, a partir de un ‘conjunto ordenado’ que aprendí de memoria en mi infancia; el último nombre que he dado, cuando no quedan más vacas, es el ‘número’ de vacas en el prado.

O también podría querer decir:

> He señalado una vaca diferente con cada dedo de mi mano derecha hasta que no quedan ni vacas ni dedos; por lo tanto, hay el *mismo número* de vacas que de dedos; éste es el número que se denomina ‘cinco’.

El número al que llegamos siguiendo el primer procedimiento, asignando nombres de la lista ‘uno’, ‘dos’, ‘tres’, ‘cuatro’, ‘cinco’, ‘seis’, ... (o, abreviando, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., donde los ‘símbolos’ 1, 2, ... representan las respectivas palabras), se denomina ‘número ordinal’ debido a que los nombres se asignan en un *orden* estándar.

El número obtenido mediante el segundo procedimiento no depende del orden de los nombres en una lista. Los matemáticos lo llaman ‘número cardinal’: depende del ‘emparejamiento’ de objetos de un conjunto con objetos de otro conjunto, denominado ‘conjunto estándar’. Por ejemplo, puedo emparejar las vacas del prado con los miembros de un conjunto ‘estándar’ de objetos, como son los dedos de mi mano derecha, escogiendo una vaca por cada dedo. Pero, entonces, resulta que necesitamos un conjunto estándar para cada número. Así, si defino ‘dos’ como el número de manos que tengo, también podré decir que tengo dos ojos, ya que puedo cubrir cada uno de ellos con una de mis manos. Del mismo modo, poniendo punta con punta los dedos de mi mano izquierda con los de mi mano derecha (utilizada ya como conjunto estándar de ‘5’ objetos) observo que también hay 5 dedos en mi mano izquierda. El tipo de ‘emparejamiento’ establecido en estos ejemplos se denomina ‘correspondencia uno a uno’ entre los objetos de dos conjuntos. Para recordar lo que significa esto, podemos emplear el término ‘número de emparejamiento’ como equivalente a ‘número cardinal’.

En vez de utilizar conjuntos de manos o dedos para definir números, es más sencillo usar otros objetos, tales como montones de piedras o cuentas. Mucha

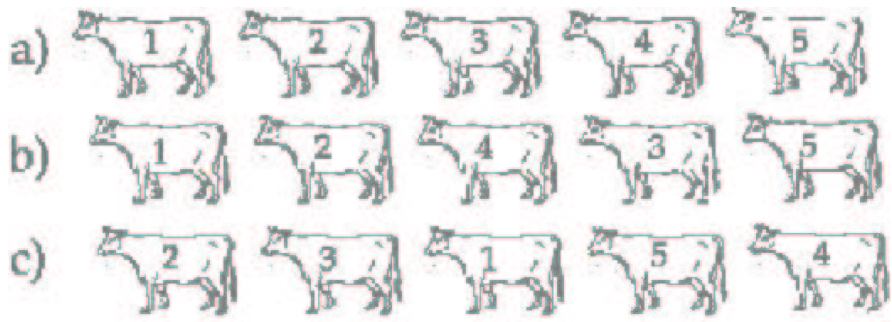


Figura 3

gente piensa que esta forma de llegar a los números fue empleada hace miles de años, cuando los seres humanos comenzaron a cuidar animales por primera vez: con un montón de piedras, una por cada vaca, sería fácil decir si todas las vacas habían regresado por la noche, retirando una piedra por cada vaca y observando si quedaba alguna en el montón —si quedaba una piedra, se habría perdido una vaca. Con lo que hemos aprendido sobre los números, ya no necesitamos mantener todos esos montones de piedras, como vamos a descubrir ahora.

¿Es importante saber cómo hallamos el número de objetos de un conjunto? Las 5 vacas son 5 vacas independientemente de cómo obtengamos el número. Para asegurar que esto siempre es así, escribamos los símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... sobre trozos de papel adhesivo y coloquemos uno sobre cada vaca, como en la Fig. 3(a). Claramente, el 6 y los números que vengan tras él no serán necesarios, ya que el número *ordinal* asignado a la última vaca es 5. Al adherir las etiquetas sobre las vacas hemos establecido una correspondencia uno a uno entre los miembros del conjunto de vacas y los trozos de papel. Así, los dos conjuntos contienen el mismo número de objetos: el número *cardinal* (o 'de emparejamiento') 5. Mientras estemos hablando sobre cosas que podamos contar, *los números ordinales y cardinales deben coincidir*. El motivo es que el emparejamiento entre los miembros de dos conjuntos no depende de la *forma* en que se realizan las parejas; si las etiquetas sobre las vacas se colocasen de un modo diferente, como en la Fig. 3(b), su número no cambiaría. El cambio de 3 por 4 y de 4 por 3 se denomina 'intercambio'; realizando muchos intercambios podríamos mezclar totalmente todas las etiquetas, como sucede en la Fig. 3(c), sin cambiar el número de vacas. En otros términos, *el número de objetos de un conjunto no depende del orden en que se cuentan*. Un famoso matemático del siglo pasado ha considerado este hecho como "uno de los dos principios más importantes de las Matemáticas" —el otro es que no existe modo alguno de distinguir entre izquierda y derecha a menos que esto se indique expresamente. La ordenación de números en la Fig. 3(c) se llama 'permutación' de los números respecto a su orden estándar [Fig. 3(a)]. El número de permutaciones posibles crece muy rápido a medida que crece el número: 5 números se pueden ordenar en más de 100 formas diferentes, pero con 10 números hay *millones* de permutaciones diferentes. Para entender cómo puede haber tantas, pensemos cómo podrían entrar las 5 vacas en el prado. La primera podría ser, quizás, la número 4 —ésta es una de las 5 posibilidades. La siguiente en entrar podría ser la número 2, una de las 4 vacas que se habían quedado fuera (porque la número 4 ya está dentro). Por tanto, las primeras dos vacas pueden entrar de 20 ($= 5 \times 4$) maneras distintas. A continuación entra otra vaca, que puede ser la 1, la 3 ó la 5, de manera que las tres primeras vacas en entrar podrían etiquetarse de 20×3 ($= 5 \times 4 \times 3$) formas diferentes. Ahora ya puedes averiguar la respuesta: habrá $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ permutaciones de las vacas. Este número se denomina 'factorial de 5' y se escribe '5!'. Si quieres contar hasta 10!, verás que el número se merece, ciertamente, ¡una exclamación!

Los números que van apareciendo según contamos se llaman 'números naturales' y son **enteros**.

1.3. Un nombre para los números

Cuando contamos, no hay final; podríamos continuar indefinidamente (piensa en las estrellas del cielo). Sin embargo, debemos dar nombres a los números y esto se vuelve cada vez más difícil —y más difícil aún es *recordarlos*. Los primeros (expresados mediante palabras y símbolos) son:

'uno'	'dos'	'tres'	'cuatro'	'cinco'	'seis'	'siete'	'ocho'	'nueve'
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Cuando llegamos a 9, nos empezamos a sentir cansados ya, así que pararemos aquí. Pero, si hay más vacas en el prado, ¿cómo denominaremos a la siguiente?

Para contar más allá del 9 utilizamos un truco: añadimos un símbolo más a nuestro conjunto de 9, que llamamos '0' ó, mediante una palabra, 'cero'. Por tanto, el conjunto de símbolos es:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 0$$

En particular, estos símbolos se denominan 'dígitos'. El próximo número tras el 9 puede escribirse ahora como '10', que es un nombre *nuevo* (ni 1 ni 0), y se conoce como 'diez'. Ahora, nuestro primer conjunto de diez enteros es:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

que se ajustan a los 10 miembros del conjunto de símbolos. Si queremos contar más allá del 10 podemos cambiar el cero por 1, 2, 3, ... para conseguir más nombres. Éstos son (expresados mediante símbolos y palabras):

11	12	13	14	15
'once'	'doce'	'trece'	'catorce'	'quince'
16	17	18	19	20
'dieciséis'	'diecisiete'	'dieciocho'	'diecinueve'	'veinte'

donde al último número se le llama '20' ('veinte'), que está preparado para dar pie al siguiente conjunto de 10 números en los que el cero se reemplaza por 1, 2, 3, ... y así sucesivamente. Por supuesto, los nombres de los números, en palabra, dependerán del lenguaje que hablas: en español 'dieciséis' significa 'diez-y-seis' (seis posiciones tras el 'diez'), pero en inglés el mismo número es 'sixteen' donde 'six' significa 'seis' y 'teen' procede de 'ten', que es 'diez'. Una de las cosas más bonitas de las Matemáticas es que su lenguaje es el mismo para cualquiera; si escribes '16', prácticamente cualquier persona en el mundo sabrá lo que quieres decir.

Continuando del mismo modo, podemos obtener los primeros diez conjuntos de diez números. Estos puede escribirse en forma de 'tabla':

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

donde el '90' de la penúltima línea ha pasado a ser '100' en la última línea (el 9 cambia por 10), mostrando que es el último número de la línea 10. Este número se denomina 'cien' y el que le sigue (el primer número de la línea 11) se llama, expresado con palabras, 'ciento uno'. Podemos continuar así, sucesivamente, tanto como queramos, asignando a cada número un nombre de acuerdo con estas reglas sencillas. La línea 11 finalizará con '110'; la siguiente comenzará con '111', '112', ... y finalizará con '120'; la línea 100 empezará con '990', '991', etc., hasta el '999' y después el '1000'. Este nuevo número se denomina 'mil'.

Los números naturales, contados en conjuntos de diez y empleando los símbolos 1, 2, 3, ... y 0 (los números 'en base 10'), fueron introducidos en Europa por los árabes —quienes los trajeron, a su vez, de la India hace aproximadamente 1300 años, *añadiendo el cero*. Muchas cosas sobre los números no fueron plenamente comprendidas en esos tiempos, especialmente el significado del símbolo 0, que (como veremos más adelante) puede representar un número por sí mismo, por lo que la idea de número ha tenido una larga y difícil historia. De hecho, no ha sido hasta finales del siglo XVI cuando los símbolos adquirieron las formas que usamos hoy día.

Somos afortunados de ser capaces de comenzar con una forma de contar 'hecha a la medida', inventada hace tanto tiempo y transmitida de generación en generación —gracias al descubrimiento de la escritura.

Ejercicios

(1) Corta una barra unidad (no tiene por qué ser de 1 m; puede ser de 1 'mi–unidad') y haz unas cuantas más de igual longitud. Mide con ellas algunas distancias. (Puede usar un codo como tu longitud estándar: el ancho más el largo de una página de este libro te da aproximadamente un codo, que está muy cerca de medio metro.)

(2) Haz una máquina de pesar simple utilizando un pequeño cubo de plástico colgando de un material elástico (por ejemplo, un muelle o una goma). Fija una tira al cubo y coloca detrás una tarjeta de manera que puedas ver cuánto se desplaza la tira cuando introduces distintos pesos en el cubo. Después reproduce los experimentos con la arcilla. (Si no tienes un kilogramo estándar y arcilla, usa una piedra grande y bolsas de plástico rellenas con arena.)

(3) Haz un péndulo a partir de una cuerda y una cuenta pesada. Después úsalo para comparar tiempos (por ejemplo, los tiempos que se necesitan para rellenar diferentes contenedores bajo un chorro de agua).

(4) Tres amigos (llamémosles A, B y C) vienen a tu casa por separado: ¿de cuántas formas pueden llegar? Escribe todas las posibilidades (BAC, CBA, ..., donde BAC significa primero 'B', luego 'A' y, por último, 'C') y después cuéntalas.

(5) Hay cinco vacas (tres blancas y dos negras) en un prado. ¿De cuántas maneras puedes sacar dos blancas y una negra?

(6) Amplía la tabla de la página 7, cuya última línea es:

$$91 \quad 92 \quad 93 \quad 94 \quad 95 \quad 96 \quad 97 \quad 98 \quad 99 \quad 100$$

añadiendo 11 líneas más.

(7) Escribe todos los números que contiene la línea 50.

Capítulo 2

Combinando números

2.1. La suma

Ahora que tenemos números, ¿qué hacemos con ellos? En primer lugar, necesitamos saber cómo pueden combinarse. La tabla que hemos construido en el capítulo anterior nos muestra dos maneras de hacer esto. Echemos un vistazo a las primeras dos líneas:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Cuando leemos a lo largo de una fila, nos viene a la mente un primer tipo de combinación, denominado **suma** o **adición**. A partir de un entero cualquiera, por ejemplo, el 5, podemos conseguir el siguiente contando uno más, lo que nos lleva al 6, el número que precede al 5. Escribimos este resultado como $6 = 5 + 1$, donde el signo 'más' (+) representa el acto (u 'operación') de 'sumar', el '1' se utiliza para expresar 'uno más', y el signo '=' significa 'es lo mismo que' o 'es igual a'.

El número que obtenemos mediante la adición es la **suma** de los números que hay a ambos lados del signo +. Por supuesto, podemos proceder de nuevo del mismo modo: después del 6 viene el 7, lo que significa $7 = 6 + 1$. Pero, como $6 = 5 + 1$, podemos decir que $7 = 5 + 1 + 1$. Este resultado puede escribirse como $7 = 5 + 2$, ya que $1 + 1 = 2$. Y como $5 = 4 + 1$, podemos decir que $7 = 4 + 1 + 2 = 4 + 3$, puesto que contar dos después de 1 nos lleva al 3. Obsérvese que contar dos después de 1 da lo mismo que contar uno después de 2. Expresado mediante símbolos esto significa que $1 + 2 = 2 + 1$, es decir, el orden en el que se combinan los números no influye en el resultado final. Utilizando los símbolos podemos expresar fácilmente cosas que serían largas y complicadas de decir con palabras. Además, podemos decir cosas que son verdaderas para *cualquier número* (no sólo para números particulares como el 6 ó el 7).

Para aclarar esto, *asociemos* los nombres a y b a *cualesquiera* dos números —podrían ser 1 y 2, ó 4 y 2, ó 2 y 2 ... ó cualquier otro par de números que deseemos. Cuando los añadimos, conseguimos un número nuevo, que denominaremos c. Si hemos elegido —*sólo por el momento*— $a = 1$ y $b = 2$, entonces sabemos que $c = 1 + 2 = 3$. Como hemos señalado anteriormente, $2+1$ da el mismo resultado, $c = 2+1$. Por tanto, $a+b = c$ también significa que $b+a = c$. Del mismo modo, eligiendo $a = 4$ y $b = 2$, una ojeada a nuestra tabla nos muestra que $4 + 2 = 6$ (contar dos tras el 4) y que $2 + 4$ (contar cuatro tras el 2) dan el mismo resultado. De nuevo, con a y b representando al nuevo par de números (4 y 2), vemos que

$$a + b = b + a. \tag{2.1}$$

Este resultado se suele denominar "propiedad de combinación". Es una propiedad (o regla) para combinar dos números y se cumple *para cualesquiera dos números*. Los matemáticos la denominan **propiedad conmutativa**, expresando con ello que no importa el modo en que se combinen dos objetos —sumar a a b es lo mismo que sumar b a a.

Antes también hemos observado que la forma en que *agrupamos* los números no es importante, ya que siempre da el mismo resultado. Por ejemplo, $7 = 4 + 1 + 2 = 4 + 3$ (donde hemos sumado los dos últimos números antes de añadírselos al 4) es lo mismo que $7 = 5 + 2$ (donde hemos añadido los primeros dos números antes de añadírselos al 2). Para aclarar la diferencia, podemos poner entre paréntesis las operaciones (sumas) que realizamos primero, escribiendo así

$$7 = 4 + (1 + 2) = 4 + 3 \quad \text{y} \quad 7 = (4 + 1) + 2 = 5 + 2.$$

De nuevo, este resultado constituye una regla *general* —se cumple con independencia de los números que se combinen en la suma. Si etiquetamos a estos tres números como a, b y c, entonces

$$(a + b) + c = a + (b + c). \tag{2.2}$$

Esta es la segunda propiedad importante para combinar números mediante la suma. Los matemáticos también tienen un nombre especial para ella, designándola **propiedad asociativa**. Tanto (2.1) como (2.2) proceden del hecho de que el número es independiente del orden en que se cuenta.

Cuando aprendimos a contar por primera vez probablemente jugamos con *conjuntos de objetos*, no con números. Si los objetos son cuentas en una cuerda, las propiedades para combinarlas pueden representarse gráficamente. Por ejemplo,

$$\bullet\bullet\bullet\bullet \qquad \bullet\bullet \qquad \text{y} \qquad \bullet\bullet \qquad \bullet\bullet\bullet\bullet$$

son los mismos conjuntos de cuentas, aunque agrupadas de dos formas diferentes. Estas representaciones gráficas expresan el resultado (2.2) cuando $a = 4$ y $b = 2$.

Del mismo modo, la suma de los tres números $a = 4$, $b = 1$ y $c = 2$, nos da la representación

$$\bullet\bullet\bullet\bullet \qquad \bullet \qquad \bullet\bullet$$

(4 cuentas más 1 cuenta más 2 cuentas), que pueden ser reagrupadas como

$$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \qquad \bullet\bullet$$

(la representación para $5 + 2$, siendo 5 igual a $4 + 1$) o, alternativamente, como

$$\bullet\bullet\bullet\bullet \qquad \bullet\bullet\bullet$$

(la representación para $4 + 3$, siendo 3 igual a $1 + 2$).

Ahora, sin embargo, en vez de utilizar conjuntos de *objetos*, podemos jugar con *números* —que sólo existen en nuestras *mentes* y provienen de la *idea* de contar los miembros de un conjunto. Tenemos un símbolo para cada número y las 'reglas del juego' son las propiedades de la combinación. No siempre es necesario contar cuentas, vacas, ..., ya que podemos contar mentalmente. Sabiendo que $3 + 4 = 7$, podemos decir que 3 vacas junto con 4 vacas son 7 vacas —como también lo serán 3 vacas más otras 2 más otras 2.

2.2. La multiplicación

Otra forma de combinar números es la **multiplicación**. Mira las 3 primeras líneas de la tabla de la sección 1.3. Éstas son

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Cada fila contiene 10 números y 3 filas de 10 contienen juntas 30 números diferentes (siendo 30 el último nombre si contamos a lo largo de las filas, una tras otra). La acción de tomar 3 conjuntos de 10 objetos, poniéndolos juntos y considerándolos como *un nuevo conjunto*, nos permite definir la multiplicación: el número de elementos en los tres conjuntos se relaciona diciendo “3 veces 10 son 30”, que escribimos con símbolos como $3 \times 10 = 30$. El símbolo $\times$ es el ‘signo de multiplicar’ y significa ‘multiplicar por’ (tal como + significaba ‘sumar a’); el resultado se denomina **producto** (igual que cuando sumamos dos números obtenemos su ‘suma’).

Utilizando a y b para representar *cualesquiera* dos números, la multiplicación da un número $c = a \times b$ tal que, dicho mediante palabras, a conjuntos de b objetos contendrán juntos un total de c objetos. De nuevo, no importa qué son esos objetos —pueden ser únicamente símbolos que representan números; además, tampoco es necesario que estén agrupados en filas de diez, como en la tabla. Si consideramos 3 filas de 4 objetos, podemos representarlos gráficamente como:

$$\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

Contándolos todos juntos vemos que hay 12 objetos: $3 \times 4 = 12$. Sin embargo, imagina que giramos la representación, de manera que haya 4 filas de 3 columnas. El conjunto de objetos no ha cambiado para nada y, por tanto, el número que contiene no ha cambiado. Se verá de esta manera:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

y contendrá 4×3 objetos. El resultado de contar a lo largo de 4 filas, una tras otra, se escribe $4 \times 3 = 12$; por tanto, el orden en el que se escriben ambos números no altera el resultado final. Por consiguiente, la propiedad que rige la combinación de dos números mediante la multiplicación es

$$a \times b = b \times a, \tag{2.3}$$

es decir, igual que sucedía con la suma, pero sustituyendo el signo + por $\times$.

También aquí, cuando tenemos tres números, la operación de multiplicar puede realizarse de dos formas diferentes; $a \times b \times c$ puede obtenerse procediendo como $a \times (b \times c)$ ó como $(a \times b) \times c$, dependiendo de qué multiplicación se realice primero. Al igual que sucedía cuando vimos la segunda propiedad de la suma, también aquí ambos resultados son iguales:

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c, \tag{2.4}$$

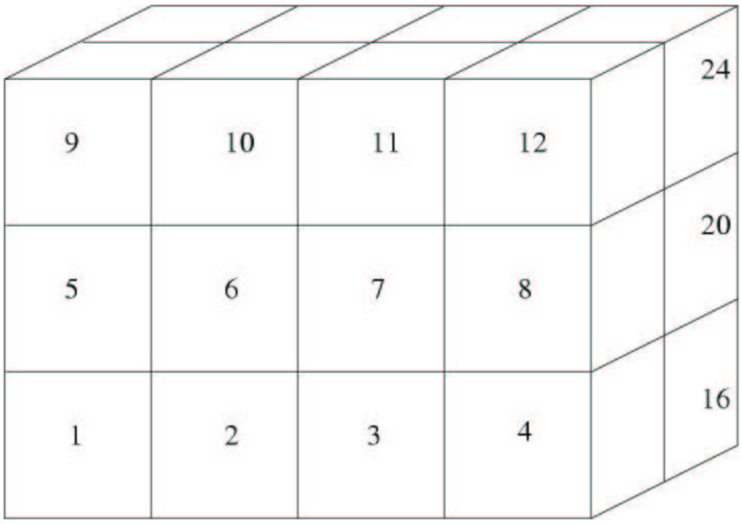


Figura 4

independientemente de cómo 'emparejemos' los números en el producto. Para ver por qué esto es cierto, reemplacemos los números mediante ladrillos numerados y coloquémoslos en una pared, como en la Fig. 4, tomando $a = 2$, $b = 4$ y $c = 3$. El lado vertical tiene 3 ladrillos de altura y la capa de abajo consta de $8 = 2 \times 4$ ladrillos. Lo mismo sucede con las siguientes capas. Por tanto, las 3 juntas contendrán $(2 \times 4) \times 3 = 24$ ladrillos. Sin embargo, también podemos decir que hay dos capas verticales de ladrillos (una delante y otra detrás), cada una con $3 \times 4 = 12$ ladrillos, de manera que el número de ladrillos en la pared es $2 \times (3 \times 4) = 24$. De cualquier manera que miremos, la pared siempre consta de 24 ladrillos. Esto no es una *prueba* de lo que dice (2.4), sino sólo un ejemplo que muestra que la propiedad se satisface cuando $a = 2$, $b = 3$ y $c = 2$ —y estamos construyendo una pared de ladrillos. Para probar (2.4) con conjuntos que contengan cualquier número de elementos debemos usar únicamente las propiedades de los propios números, lo cual es más difícil.

Junto con (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4), ya sólo necesitamos una propiedad más para combinar números:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c), \tag{2.5}$$

donde a, b y c son, como siempre, tres números enteros cualquiera. Si los números se refieren a objetos que podemos contar, (2.5) simplemente dice que a filas de $b + c$ objetos contendrán $a \times b$ objetos (como si c no estuviese) más $a \times c$ (cuando se suman c objetos a cada fila). La relación (2.5) se denomina **propiedad distributiva**.

Ejercicios

(1) Construye las siguientes 'tablas de multiplicar' usando conjuntos de puntos y el método de contar utilizado para hallar el resultado (2.3):

$$\begin{array}{lllll}
1 \times 1 = 1 & 2 \times 1 = 2 & 3 \times 1 = 3 & 4 \times 1 = ? & 5 \times 1 = ? \\
1 \times 2 = ? & 2 \times 2 = ? & 3 \times 2 = ? & 4 \times 2 = ? & 5 \times 2 = ? \\
1 \times 3 = ? & 2 \times 3 = ? & 3 \times 3 = ? & 4 \times 3 = ? & 5 \times 3 = ? \\
1 \times 4 = ? & 2 \times 4 = ? & 3 \times 4 = ? & 4 \times 4 = ? & 5 \times 4 = ? \\
1 \times 5 = ? & 2 \times 5 = ? & 3 \times 5 = ? & 4 \times 5 = ? & 5 \times 5 = ?
\end{array}$$

Reemplaza cada interrogante (?) por el número correcto.

(2) Verifica las propiedades (2.3), (2.4) y (2.5) tomando primero $a = 2$, $b = 3$ y $c = 4$, y después con $a = 12$, $b = 3$ y $c = 4$. (Si no tienes la tabla 'del 12' en mente, escribe $12 = 6 + 6$ y usa las mismas propiedades con los números más pequeños.)

(3) Construye una tabla de multiplicar hasta 9×9 partiendo de la tabla 'del 5' del ejercicio 1. (Necesitarás los números que vienen tras el 9, como están en la lista de la sección 1.3.)

Capítulo 3

Inventando números nuevos: las ecuaciones

3.1. Números negativos y ecuaciones sencillas

Ya sabemos bastante sobre los números 'naturales', que también se conocen como **enteros**. Se ha dicho que Dios creó los enteros, dejándonos el resto a nosotros. No obstante, los enteros pueden usarse para crear nuevos números, que no tienen nada que ver con los que hemos estado usando hasta ahora.

Para inventar números nuevos, partimos primero del **concepto** de número, como se ha hecho hasta aquí para obtener las reglas que utilizamos para contar, comparar y combinar. Después, observamos que hay cuestiones que podemos preguntar para las que parece que no hay respuesta, lo que lleva a sinsentidos. Sin embargo, en vez de abandonar el 'sinsentido', buscamos formas de darle un significado usando únicamente lo que ya sabemos. De este modo, *extendemos* nuestros conceptos. Esta es la idea de la *generalización*, que corre a través de todas las Matemáticas.

Piensa en la definición de suma: $a + b = c$. Si alguien nos dice que $a = 2$ y $c = 5$, puede que quiera saber cuánto vale b. En tal caso, b es la 'incógnita'. A menudo, a una incógnita se le asigna la etiqueta 'x', de manera que tenemos que encontrar el x tal que $2 + x = 5$, expresión ésta que se denomina **ecuación**. La ecuación es 'satisfecha' (se cumple) cuando $x = 3$; ésta se denomina la **solución** de la ecuación.

La ecuación

$$a + x = c \tag{3.1}$$

tiene solución cuando c es mayor que a, porque después de añadir x objetos a un conjunto de a objetos, éste último contendrá *más* objetos que antes. Decimos que hay una solución cuando $c > a$ (se lee "c es mayor que a"). Pero, ¿qué sucede si $c < a$ ("c es menor que a")? Por lo que sabemos hasta ahora, no hay ningún número que sumado a a haga más pequeño a éste. Si $a = 2$ y $c = 1$, parece no haber respuesta para la pregunta: si $2+x = 1$, ¿cuál debe ser el valor de x? (x vacas añadidas a 2 vacas nunca puede dar 1.)

Incluso si $a = 2$ y $c = 2$, el conjunto de números de la tabla de la página 7 no contiene ningún número tal que $2 + x = 2$. No obstante, podemos *inventar* uno. Podemos tomar el *cero* de nuestro conjunto de símbolos (página 6) y considerarlo como nuestro primer número nuevo, con la propiedad

$$a + 0 = a, \qquad 0 + a = a, \tag{3.2}$$

cualquiera que sea el valor representado por a. Sumar cero a cualquier número no cambia nada.

Volvamos ahora a la ecuación (3.1) y preguntemos cuál es la solución cuando $c = 0$. De nuevo, no hay ningún número en nuestra tabla de enteros (página 7) tal que $a + x = 0$. Así que, volvamos a inventar un número, denominándolo 'a con gorro' o $\hat{a}$, tal que cualquier número natural a tiene una pareja $\hat{a}$ con la propiedad

$$a + \hat{a} = 0. \tag{3.3}$$

Como resultado, el conjunto de todos los números se extiende, siendo

$$\ldots, \quad \hat{4}, \quad \hat{3}, \quad \hat{2}, \quad \hat{1}, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots$$

donde los puntos suspensivos (...) significan que la lista se extiende indefinidamente a izquierda y derecha.

Queremos que todos los números nuevos se comporten tal como lo hacen los que ya conocemos, obedeciendo las mismas propiedades de combinación, de la (2.1) a la (2.5). Por tanto, ¿cuál debería ser el significado de $\hat{a}$? Los números naturales se utilizaron primeramente para contar los objetos de un conjunto; tenemos una representación simple de un conjunto de 5 objetos (por ejemplo, las vacas de un prado) e incluso de un 'conjunto vacío', que contiene 0 objetos (por ejemplo, un prado sin vacas). Pero, ¿cómo podemos imaginar un conjunto con $\hat{5}$ objetos? A primera vista, esto parece un sinsentido, pero si observamos detenidamente (3.3) está claro que añadir $\hat{a}$ objetos debe ser lo mismo que *retirar* a objetos. Así, podemos escribir $\hat{a} = -a$, donde el signo 'menos' significa 'retirar' o 'sustraer'.

De lo anterior se desprende que (3.3) puede reescribirse como $a + \hat{a} = a + (-a) = 0$, donde el signo $+$ y los paréntesis no son necesarios, ya que el signo menos nos indica que hay que retirar a de la cantidad precedente. En general, solemos escribir (3.3) de la forma

$$a + \hat{a} = a - a = 0, \tag{3.4}$$

que es el número de objetos en el conjunto vacío. Con palabras, *sumar $-a$ es lo mismo que retirar a.* Recordar también, de (2.1), que no importa el orden en el que se suman los números:

$$a + (-a) = (-a) + a \qquad \text{ó} \qquad a - a = -a + a.$$

Todas las cosas separadas por los signos $=$ son equivalentes a cero.

Se dice que el acto u **operación** de sustraer o restar es el **inverso** de la suma: si b es cualquier número, el efecto de sumarle a queda neutralizado totalmente cuando le restamos a, ya que $b+a-a = b+0 = b$ y b permanece invariable.

Utilizando el signo menos, la lista completa de números enteros (dada antes) pasa a ser:

$$\ldots, \quad -4, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots$$

donde los números a la derecha del cero son los **enteros positivos** ('números naturales'), mientras que aquellos a su izquierda son los **enteros negativos** ('números inventados'). Para usar el conjunto completo de enteros positivos y negativos, sólo necesitamos las reglas (2.1) a (2.5). Para encontrar el número x que satisface la ecuación (3.1), observamos que sumando el mismo número $\hat{a}$ a ambos lados del signo igual (de manera que ambos lados permanezcan iguales) uno obtiene

$$x = c + \hat{a} = c - a.$$

Siempre que $c > a$, la respuesta es un entero positivo (por ejemplo, $x = 5-2 = 3$). Sin embargo, si $c < a$, estaremos retirando más de lo que tenemos. Así, en su lugar, añadamos $\hat{c}$ a ambos lados de (3.1), para obtener $a+x+\hat{c} = 0$, y después añadamos $\hat{x}$ a ambos lados. El resultado es $\hat{x} = a + \hat{c} = a - c$, que es un entero positivo cuando $c < a$. Así, de nuevo, no hay problema, la solución es el entero *negativo* $\hat{x}$ ó $-x$, que es la pareja de x.

Ahora tenemos el conjunto de todos los enteros, junto con sus parejas negativas y el cero, cuyos elementos pueden combinarse de dos formas: (i) mediante la suma, satisfaciendo las propiedades (2.1) y (2.2), y (ii) mediante la multiplicación, satisfaciendo (2.3), (2.4) y (2.5). El conjunto también contiene una 'unidad respecto de la suma', el cero (0), que puede añadirse a cualquier número del conjunto sin cambiarlo ($a+0 = a$). Además, para cualquier entero

a hay un 'inverso respecto de la suma', $-a$. Los matemáticos llaman **anillo** a tal conjunto. El anillo es 'cerrado' respecto de las dos operaciones, ya que siempre dan lugar a otro miembro del conjunto: el anillo posee la propiedad de **cierre**.

Hay una regla de oro al jugar con ecuaciones: si dos cosas son iguales y las pones a ambos lados de un signo =, los dos lados permanecerán iguales *siempre que procedas exactamente igual en cada lado.*

De este principio se siguen varias reglas simples. La primera de ellas surge cuando tratamos la combinación mediante la suma. Por ejemplo, si

$$a + b = c + d,$$

entonces podemos añadir $-b$ a ambos lados de la ecuación, obteniendo $a + b - b = c + d - b$. Pero, como $b - b = 0$, que puede sumarse a cualquier número sin alterarlo, obtenemos

$$a = c + d - b.$$

La b en el lado izquierdo de la primera ecuación puede desplazarse al lado derecho *siempre que* la reemplacemos por $-b$ (su *inverso* respecto de la suma).

¿Qué sucede, sin embargo, si b es un entero negativo, por ejemplo, $-p$? En tal caso, la regla dice que podemos quitar $-p$ del lado derecho si lo reemplazamos por $-(-p)$ (algo que no hemos visto hasta ahora). Para determinar el significado del 'doble menos' retrocedamos a la propiedad básica (2.5), poniendo $c = -b$ y $a = -1$. El resultado es

$$-1 \times (b - b) = -1 \times b + -1 \times (-b)$$

ó, como $b - b = 0$ y un factor 1 no cambia nada, $0 = -b - (-b)$. Pero, si añadimos b a ambos lados de la última ecuación, obtenemos $b = -(-b)$ (ya que $b - b = 0$). Esto es cierto para *cualquier* número, de manera que

$$-(-a) = +a, \tag{3.5}$$

que es la regla 'dos signos menos son un signo más'. Por lo tanto, cuando desplazas un entero negativo a través de un signo =, debes convertir a aquél en un positivo. Es decir, a cualquier cosa que desplaces le debes invertir el signo.

Como ya sabemos, hay una segunda manera de combinar números, la multiplicación, con una propiedades de algún modo similares. Sin embargo, esto lo veremos en una sección posterior. Por ahora, nos contentaremos con lo que tenemos: ya hemos descubierto un conjunto completo de reglas para combinar varios números a, b, c, ... (no importa cuántos o qué nombres les asignemos) y necesitamos probarlas con cuidado para asegurarnos de que siempre funcionan.

Las reglas que tenemos vienen dadas por (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) y (2.5). Todas ellas se aplican a cualesquiera tres números cuando se combinan utilizando sólo la suma y la multiplicación. Pruébalas eligiendo diferentes ejemplos con cualquier valor que puedan adquirir los números (por ejemplo, $a = 3$, $b = -5$ y $c = 2$).

(No olvides las propiedades del 0 y el hecho de que un entero negativo es el inverso respecto de la adición de su pareja positiva.)

3.2. Una representación para los números: los vectores

Antes de continuar es útil disponer de una representación gráfica que nos permita 'visualizar' los propios números. El número de objetos o 'elementos' de un conjunto es siempre un entero positivo. En la escala de números

$$\ldots, \quad -4, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots$$

los enteros positivos siempre aparecen a la derecha del cero (0), que representa al conjunto vacío. Pero, ¿cómo podemos representar los enteros *negativos*, que aparecen a la izquierda de 0? Incluso si retiramos todas las vacas para conseguir un prado vacío con 0 vacas, no podemos imaginarnos un prado 'más que vacío.

La manera de abordar este problema es *representar* cada número mediante un punto sobre una línea [los puntos de la Fig. 5(a)], cada uno con una etiqueta que muestre cuántos pasos se necesitan para alcanzarlo, comenzando desde el punto etiquetado como '0'. Éste se denomina **origen** (a menudo se indica con la letra mayúscula 'O'), mientras que la línea sobre la que están los puntos se llama **eje**. Así, pues, los puntos que representan los enteros positivos se alcanzan dando un determinado número de pasos desde el origen hacia la derecha. Y aquéllos asociados a los enteros negativos, dando un cierto número de pasos hacia la izquierda. Esto nos recuerda la forma en que medíamos la distancia (página 1) desde un punto a otro mediante 'zancadas'. Sin embargo, ahora estamos hablando de pasos 'hacia la derecha' o 'hacia la izquierda', de manera que tanto la longitud como la *dirección* del paso son importantes. Usemos el símbolo e para representar un paso hacia la derecha, $2\mathsf{e}$ para dos, $3\mathsf{e}$ para tres, etc., observando que los pasos se *combinan* dándolos uno

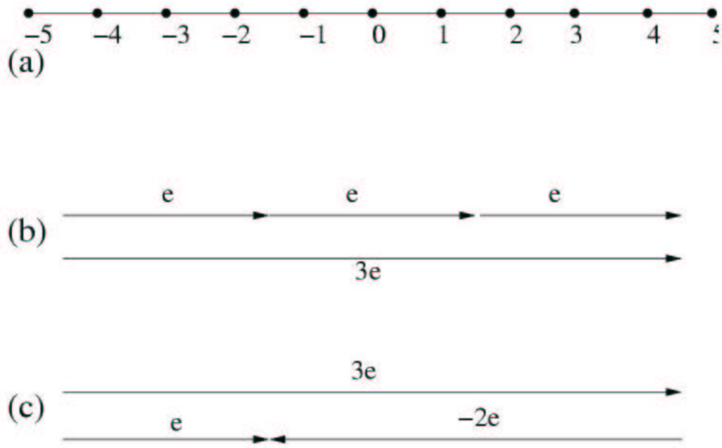


Figura 5

detrás de otro, comenzando siempre desde el punto ya alcanzado. Un 'paso orientado', como e o $n\mathsf{e}$ (si das n pasos), se denomina **vector**; éste define el *desplazamiento* desde un punto a otro. Los vectores nos ayudan a establecer una conexión entre las ideas de *número* y *espacio* (que es el tema de estudio del libro 2). Hay un vector por cada punto a la derecha del origen O en la Fig. 5(a) —el vector para el punto etiquetado como 3 es $3\mathsf{e} = \mathsf{e} + \mathsf{e} + \mathsf{e}$, que se muestra en la Fig. 5(b). En otros términos, hay una correspondencia uno a uno (como se explicó en el capítulo 1) entre los números 1, 2, 3, ... y los vectores $1\mathsf{e}$, $2\mathsf{e}$, $3\mathsf{e}$, ..., pudiendo utilizarse estos últimos para representar a los primeros.

¿Qué sucede con los números a la *izquierda* del origen en la Fig. 5(a)? Si utilizamos $\hat{\mathsf{e}}$ con el significado de un paso *hacia la izquierda*, está claro que

$$\mathsf{e} + \hat{\mathsf{e}} = \mathsf{0}, \tag{3.6}$$

donde $\mathsf{0}$ es el 'paso' desde el origen que nos dejaría sobre el mismo sitio (es decir, nos quedaríamos quietos). También está claro que $-\mathsf{e}$ sería un buen nombre para 'un paso hacia la izquierda', ya que podríamos decir

$$\mathsf{e} + (-\mathsf{e}) = \mathsf{0}. \tag{3.7}$$

Los enteros negativos $-1, -2, -3, \ldots$ forman un conjunto cuyos elementos están en una correspondencia uno a uno con los vectores $-1\mathsf{e}$, $-2\mathsf{e}$, $-3\mathsf{e}$, ..., los cuáles se hayan apuntando hacia aquéllos.

Las leyes que nos indican cómo combinar números mediante la suma también se aplican a los vectores que representan desplazamientos. En la Fig. 5(c) los desplazamientos $3\mathsf{e}$ y $-2\mathsf{e}$ suman $3\mathsf{e} - 2\mathsf{e} = 1\mathsf{e} = (3-2)\mathsf{e}$. En general, si a, b, c son los tres vectores asignados a a pasos, b pasos y c pasos resultantes, respectivamente, entonces

$$\mathsf{a} + \mathsf{b} = \mathsf{c} \quad \text{significa} \quad a\,\mathsf{e} + b\,\mathsf{e} = c\,\mathsf{e} = (a+b)\mathsf{e}. \tag{3.8}$$

La suma de desplazamientos a lo largo del eje quiere decir que hay que *tomarlos en sucesión* (es decir, uno detrás de otro), mientras que la suma de números se refiere sólo a *contar* objetos dentro de conjuntos. No obstante, las reglas del juego son las mismas. Por ejemplo, $\mathsf{a} + \mathsf{b} = \mathsf{b} + \mathsf{a}$, es decir, no importa el orden en el que se combinen los desplazamientos, como sucede para los números a y b.

La forma gráfica de representar números [Fig. 5(a)] arroja aún más preguntas. Si los puntos sobre la línea en la Fig. 5(a) corresponden a los enteros negativos y positivos, ¿qué sucede con los puntos intermedios?, ¿pueden identificarse también como números? En el próximo capítulo hallaremos la respuesta.

3.3. Más números nuevos: las fracciones

Regresemos ahora a la idea de multiplicación de enteros. Obtuvimos la idea de enteros *negativos* preguntando cuál debe ser el valor de x tal que $a+x = c$. Formulemos ahora una pregunta similar cuando tenemos

$$a \times x = c. \tag{3.9}$$

Si, suponemos que $a = 5$ y $c = 20$, entonces *hay* una solución, $x = 4$, puesto que sabemos que $5 \times 4 = 20$. Sin embargo, ¿qué sucede si $a = 5$ y $c = 21$? Parece que no hay solución, ya que no sabemos de ningún entero x tal que $5x = 21$.

Recuerda que al hablar sobre la suma, primero inventamos un 'número nuevo', 0 (cero), que podía sumarse a cualquier número a sin cambiarlo. A continuación inventamos un nuevo número $\hat{a}$ (para cada a) como solución de $a + x = 0$. Eso significa que $a + \hat{a} = 0$. Finalmente, reemplazamos el nombre de $\hat{a}$ por $-a$, obteniendo el conjunto de enteros *negativos*, -1, -2, -3, ... ¿Podemos hacer algo similar con la multiplicación?

Al cero, que puede sumarse a cualquier otro número sin cambiar el resultado, ya le hemos denominado 'unidad aditiva' o 'unidad respecto de la suma'. El nombre no tiene nada que ver con el número 1 ('unidad'). No obstante, 1 tiene una propiedad similar con respecto de la multiplicación: es una 'unidad multiplicativa', que puede utilizarse para multiplicar cualquier número sin variar el resultado.

Ahora, usemos (3.8) con $c = 1$ (la 'unidad respecto de la multiplicación') para definir un nuevo número $x = \bar{a}$ (denominado 'a con barra') con la propiedad

$$a \times \bar{a} = 1, \tag{3.10}$$

que se parece a (3.3), pero con 1 en vez de 0 y $\times$ en vez de $+$. Esta definición funciona bien para cualquier número a, excepto $a = 0$ (que debe dejarse aparte, como veremos posteriormente).

Para tener una idea de lo que significa todo esto, fijémosnos en la parte cerca del origen O de la Fig. 5(a). Cuando a es un entero positivo, (3.10) nos dice que, cualquiera que sea $\bar{a}$,

$$\underbrace{\bar{a} + \bar{a} + \bar{a} + \ldots + \bar{a}}_{a \text{ términos}} = 1,$$

de manera que el número estará representado por un desplazamiento que, repetido a veces, nos lleva desde el origen al punto etiquetado como 1. El número definido de esta manera se denomina **fracción** y se expresa, generalmente, como

$$\bar{a} = \frac{1}{a}$$

o, brevemente, como $1/a$. Por ejemplo, si $a = 2$, entonces $\bar{a} = \frac{1}{2}$, que se denomina 'mitad'; dos mitades hace uno: $2 \times \frac{1}{2} = 1$. En la Fig. 5(a), el número '$\frac{1}{2}$' se representaría realizando un desplazamiento de 'la mitad de un paso hacia la izquierda', yendo desde el origen al punto etiquetado como $\frac{1}{2}$; dos pasos mitad, uno tras otro, alcanzarían el punto etiquetado como 1.

El número $\frac{1}{a}$ también puede escribirse como $1 \div a$ ó, expresándolo con palabras, '1 *dividido por a*', donde la operación $\div$ es la inversa de $\times$, es decir, la **división** es la inversa de la multiplicación. Así, para cualquier número b,

$$b \times (a \times 1 \div a) = b \times 1 = b.$$

Esto es muy parecido a lo que dijimos acerca de la resta y la suma a través de la ecuación (3.4).

Ahora podemos volver a (3.9) y encontrar una solución incluso cuando ésta no sea un número entero. Multiplicando ambos lados de la ecuación $a \times x = b$ por el mismo número $1/a$, los dos lados permanecerán iguales, resultando que

$$\text{si} \quad a \times x = b, \quad \text{entonces} \quad x = \frac{1}{a} \times b = b \times \frac{1}{a} = \frac{b}{a}. \tag{3.11}$$

El nuevo número definido de esta manera para *cualesquiera* enteros a y b (positivos o negativos) se denomina **fracción racional**.

Con el descubrimiento de las fracciones racionales, que pueden ser números tanto positivos como negativos (ya que los símbolos a y b pueden llevar un signo + ó − cada uno), hemos alcanzado un nuevo hito: el conjunto de todas las fracciones racionales (que incluye los enteros cuando b dividido por a es un número entero exacto) recibe el nombre de **sistema de los números racionales**. A la utilización de las propiedades básicas (2.1) a (2.5), así como de las reglas que de ellas se desprenden para reagrupar o resolver ecuaciones se le denomina 'hacer álgebra'. El primer libro conocido sobre 'Álgebra' fue escrito por (Abu Yafar Mohamed Ben Musa) Al Juarismi de Bagdad en el siglo IX. Se tradujo del árabe al latín en torno a 1140 y fue muy importante en el desarrollo posterior de las Matemáticas. El establecimiento de estos fundamentos fue, probablemente, uno de los mayores regalos del mundo árabe a la Humanidad.

Mediante las fracciones podemos resolver ecuaciones bastante complicadas, extendiendo las ideas que obtuvimos en la sección 3.1 como resultado de introducir los números negativos. En esa sección obtuvimos una regla para expresar una ecuación de una forma más simple, aunque sólo cuando ésta involucraba la suma y su inversa (la resta). Cuando $a + b = c + d$, veíamos que $a = c+d-b$, de manera que b podía pasarse a través del signo = siempre que lo hiciésemos como $-b$. Esto se llamaba "resolver la ecuación para a". Ahora necesitamos unas reglas similares para ocuparnos de la multiplicación y su inversa (la división).

Supongamos, por ejemplo, que $a \times b = c \times d$. ¿Cómo podemos separar a de los otros números? De nuevo, podemos hacer lo mismo en ambos lados de la ecuación y éstos aún permanecerán iguales. Así que vamos a multiplicar ambos lados por $1/b$. El resultado es

$$a \times b \times \frac{1}{b} = c \times d \times \frac{1}{b}$$

o, como $b \times (1/b) = 1$ (que deja invariable cualquier cosa a la que multiplique),

$$a = c \times d \times \frac{1}{b} = c \times \frac{d}{b} = \frac{c \times d}{b}.$$

En otros términos, $\times b$ a la izquierda del signo = puede llevarse a la derecha siempre que pase como $1/b$. Multiplicar por algo a un lado del = se corresponde con *dividir* por 'eso mismo' al otro lado.

Como ejemplo de la utilización de esta regla, encontremos una forma más simple para la suma de dos fracciones racionales:

$$p = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}.$$

Podemos multiplicar el primer término de la derecha por d/d (= 1) sin cambiarlo y el segundo término por b/b. Esto da

$$p = a \times \frac{1}{b} \times \frac{d}{d} + c \times \frac{1}{d} \times \frac{b}{b}.$$

Sin embargo, como el orden de los factores no altera el producto, esta expresión puede reescribirse como

$$p = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{c \times b}{b \times d} = \frac{a \times d + c \times b}{b \times d}.$$

Nótese que el último paso se deriva de la propiedad (2.5), siendo el factor común (el mismo en ambos términos) $1/(b \times d)$. Generalmente, hoy en día los signos de multiplicar no se muestran; cuando dos símbolos aparecen juntos se supone que están multiplicados. Por ejemplo, ab significa $a \times b$. Con esta notación más corta, que utilizaremos prácticamente siempre desde ahora, el último resultado se convierte en

$$p = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}.$$

La parte superior de la fracción se llama **numerador** y la inferior es el **denominador**. El resultado se obtiene 'expresando las fracciones (a/b y c/d) con un denominador común (bd)'.

Ejercicios

(1) Verifica, contando, que las reglas básicas (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) y (2.5) para combinar números mediante la suma y la multiplicación se satisfacen cuando $a = 5$, $b = 2$ y $c = 4$.

(2) Verifica que el ejercicio anterior también se cumple cuando $a = -5$, $b = 3$ y $c = -2$ usando sólo la propiedad del 0 y la definición de entero negativo como el inverso respecto de la suma de su pareja positiva.

(3) Considera el signo $-$ como una *instrucción* para invertir la dirección de un vector, de manera que éste apunte en la dirección opuesta. Demuestra, utilizando representaciones gráficas, que (3.5) también se cumple con vectores.

(4) Dado que $\mathsf{a} - \mathsf{b} = \mathsf{c}$, ¿cómo se expresa a en términos de b y c? ¿Cómo has obtenido este resultado?

(5) El vector $m\mathsf{v}$, donde m es un entero, está construido tomando m pasos v, uno tras otro. Si $\mathsf{v} = v\mathsf{e}$ y $\mathsf{u} = u\mathsf{e}$, ¿qué vector es $m(\mathsf{u} + \mathsf{v})$? ¿Cuál es el resultado cuando $v = 2$, $u = -3$ y $m = 3$? Expresa *con palabras* lo que has hecho.

(6) Expresa las siguientes fracciones con un denominador común:

(a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \quad ?$ (b) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{3} = \quad ?$ (c) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \quad ?$

(d) $\dfrac{3}{4} - \dfrac{4}{7} = \quad ?$ (e) $\dfrac{5}{4} - \dfrac{2}{3} = \quad ?$ (f) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} = \quad ?$

(g) $\dfrac{a}{2b} + \dfrac{a}{3b} = ?$ (h) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = \quad ?$ (i) $\dfrac{1}{b} - \dfrac{a}{3b} = \quad ?$

Capítulo 4

El sistema decimal

4.1. Las fracciones racionales

En el sistema *decimal*, las fracciones racionales tales como

$$\frac{1}{10} \qquad \frac{1}{100} \qquad \frac{1}{1000} \qquad \cdots$$

tienen una importancia especial. Para ver por qué, volvamos a las representaciones gráficas como la mostrada en la Fig. 5(a). Podemos considerar que $\frac{1}{10}$ es la longitud de un 'mini–paso' $\frac{\mathsf{e}}{10}$, que daríamos desde el origen hasta el primer punto, etiquetado como '0.1' y marcado con un trazo vertical corto (|) en la Fig. 6. Repitiendo este mini–paso alcanzamos el siguiente trazo |. Procediendo sucesivamente de esta forma, después de haber dado diez de pasos como estos alcanzaríamos el número 1. Esta es la representación de $10 \times \frac{1}{10} = 1$. Todo esto queda reflejado en la Fig. 6, donde se muestra el intervalo de 0 a 1 amplificado así como los vectores que representan los 10 mini–pasos, $\frac{\mathsf{e}}{10}$, que daríamos hasta el punto etiquetado como '1'.

Cuando vamos más allá del 1, dando 11, 12, 13, ... mini–pasos, nos encon-

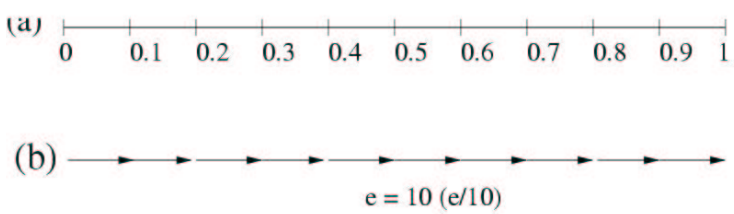


Figura 6

tramos, por ejemplo, que

$$\frac{11}{10} = 11 \times \frac{1}{10} = (10+1) \times \frac{1}{10} = 10 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{1}{10} = 1 + \frac{1}{10},$$

es decir, el patrón se vuelve a repetir: cada **intervalo** entre dos enteros está dividido en 10 partes, indicadas mediante los pequeños trazos verticales, donde cada marca etiqueta a un número nuevo.

No hay fin para todo lo que podemos hacer. Si definimos un 'mini–mini–paso', de manera que haya diez de ellos dentro de un mini–paso y cien dentro de un paso completo, podríamos poner marcas a lo largo de todo el eje (en ambas direcciones, izquierda y derecha) que se acercan más a medida que dividamos cada paso en partes más pequeñas. Llegados a este punto, da la impresión de que *todos los números* pueden expresarse como fracciones racionales. Esto, como veremos, no es así; aún quedan por descubrir más números nuevos. No obstante, para entender esto debemos detenernos a examinar con más detalle los números decimales.

Los números enteros positivos, de los que hablamos en la sección 1.3, se construyeron a partir de 10 símbolos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 0. El número 10 se denomina 'base' del sistema decimal. Además, en la sección 1.3 también alistamos una serie de números en una tabla, que repetimos a continuación:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Cada uno de estos números o 'entrada de la tabla' se alcanza comenzando a partir del 1 y contando a lo largo de las filas, de izquierda a derecha, y una fila tras otra hasta llegar al número en cuestión. Por ejemplo, la entrada 97 significa contar hasta 97, es decir, contar 9 filas completas de 10 (hasta 90) y después contar hasta 7, sumando de 1 en 1 en la décima fila. Mediante este proceso es como llegamos al 97, proceso se representa formalmente como $97 = 9 \times 10 + 7 \times 1$. De la misma forma, puedes ver que

$$197 = 1 \times 100 + 9 \times 10 + 7 \times 1,$$

donde el primer término es 100 ($= 10 \times 10$). Éste se alcanza contando, por un lado, 10 filas completas de 10 y, por otro lado, sumando los restantes términos, que dan el 97 que ya hemos obtenido antes. Como último ejemplo, consideremos

$$3107 = 3 \times 1000 + 1 \times 100 + 0 \times 10 + 7 \times 1,$$

que viene dado en términos de millares ($1000 = 10 \times 10 \times 10$), centenas ($100 = 10 \times 10$), decenas (10) y unidades (1). Este número es de 'cuatro dígitos'; cada dígito nos indica el número de millares, centenas, décimas y unidades que forman el número.

4.2. Las potencias y sus propiedades

En la representación de 3107 dada en la sección anterior, los términos como $10 \times 10 \times 10$ se denominan **potencias** de 10. Siempre es de utilidad escribir estos términos siguiendo un mismo criterio. Así, para cualquier número a, a^m representará $a \times a \times a \times \cdots \times a$, donde el producto está formado por m factores (m es un entero positivo). Obsérvese que a también podría ser, a su vez, un producto ($a = bc$). En tal caso, $a^m = (bc)^m = b^m \times c^m$, ya que el orden de los factores es irrelevante. En este tipo de representaciones de un número, a se denomina la 'base' y m el 'exponente'. Teniendo en cuenta la representación anterior de un producto, combinar dos potencias de un mismo número resulta bastante sencillo; si a^n es un producto con n factores, entonces

$$a^{(m+n)} = a^m \times a^n \tag{4.1}$$

(m factores de a seguidos por otros n más). Es decir, para multiplicar potencias de un número simplemente sumamos los exponentes.

Podemos extender la 'propiedad del producto de potencias' (4.1) haciendo que también sea aplicable a potencias *negativas*. Notar que la multiplicación de a^m por $1/a$ tiene el efecto de *eliminar* un factor a, ya que $a \times (1/a) = 1$. Así,

$$a^m \times \frac{1}{a} = a^{(m-1)}.$$

Esto es equivalente a considerar $n = -1$ en (4.1),

$$a^{(m-1)} = a^m \times a^{(-1)},$$

siempre que *definamos* potencia negativa (hasta ahora sin significado alguno) como

$$a^{-1} = \frac{1}{a}. \tag{4.2}$$

De esta manera, a^{-1} será otra denominación para $1/a$. Igualmente, un producto de n de tales factores será $a^{(-n)} = (1/a)^n$, con lo que (4.1) tendrá un significado definido para todo entero m y n (positivo o negativo) —excepto cuando uno de ellos sea cero. ¿Qué significa a^0?

Si multiplicamos a $(= a^1)$ por a^{-1}, el resultado es $a \times (1/a) = 1$. Sin embargo, de acuerdo con (4.1), con $m = 1$ y $n = -1$ esto significa

$$a^0 = 1. \tag{4.3}$$

Es decir, *cualquier número elevado a cero da 1.*

Sólo necesitamos una regla más sobre las potencias de un número. Cuando intentamos resolver la ecuación $x^2 = a$, donde a es un número cualquier y x es la incógnita, debemos preguntar por una nueva clase de *inverso*: el inverso de la *operación* de elevar algo a una potencia dada. Lo que se necesita es otra 'propiedad de potencias', aunque ésta diferirá algo de (4.1).

La nueva regla nos dará la m–ésima potencia de x^n. Cuando tanto m como n son enteros positivos está claro que

$$(x^n)^m = x^{(mn)}, \tag{4.4}$$

ya que el lado izquierdo es un producto de n veces x *multiplicado, a su vez, m veces por sí mismo*. Es decir, es un producto $x \times x \times x \times \cdots \times x$ con mn factores. Como en otras ocasiones, también aquí insistimos en que la regla ha de ser cierta de forma general e intentamos poner $m = 1/n$, en cuyo caso, $(x^n)^{1/n} = x^1 = x$. Por tanto, según esta regla

$$\text{si } x^n = a, \quad \text{entonces} \quad x = a^{1/n}. \tag{4.5}$$

Es decir, el inverso de elevar un número a la n–ésima potencia es elevarlo a la potencia $1/n$. En el caso particular $n = 2$, elevar x a 2 se denomina 'cuadrar', y la operación inversa de elevar cualquier x a la potencia $1/n$ se llama 'tomar la raíz cuadrada de x', que a menudo se denota mediante el símbolo $\sqrt{x}$. Análogamente, cuando el exponente n es mayor que 2, escribimos $x^{(1/n)} = \sqrt[n]{x}$, que es la raíz n–ésima de x. Estos resultados serán importantes en otras secciones más adelante.

Echando una mirada hacia atrás y regresando al número 3107, vemos que podemos escribir éste como

$$3107 = 3 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 7 \times 10^0,$$

donde las potencias de 10 (desde la mayor, 3, hasta la menor, 0) van multiplicadas por los dígitos 3, 1, 0 y 7. Ahora que sabemos sobre las potencias negativas, podemos extender la representación a *todos los números racionales*, incluyendo aquéllos con una parte fraccional (que corresponde a los puntos *entre* los enteros, como en la Fig. 6). Así, 3107,42 se utilizará para etiquetar un punto que se halla 4 mini–pasos y 2 mini–mini–pasos tras el punto con la etiqueta entera 3107 —la 'coma decimal' (,) simplemente separa el número entero a la izquierda de la parte fraccional que le sigue. En general, un número de seis dígitos $rst{,}uvw$ se puede escribir como

$$rst{,}uvw = r \times 10^2 + s \times 10^1 + t \times 10^0 + u \times 10^{-1} + v \times 10^{-2} + w \times 10^{-3},$$

donde la parte fraccional es $u \times (1/10) + v \times (1/100) + w \times (1/1000)$.

4.3. Números decimales interminables

Al final de la sección 3.2 nos preguntábamos si *cada* número que etiqueta un punto sobre el eje de una representación gráfica, tal como la de la Fig. 5(a), era expresable como una fracción racional de la forma p/q, con un denominador q lo suficientemente grande. Por ejemplo, $1{,}414 = 1414/1000$ es la fracción racional que corresponde al número decimal en el que los términos $1+(4/10)+(1/100)+(4/1000)$ han sido expresados mediante el denominador común 1000. En el sistema decimal, el denominador común es siempre una potencia de 10, pero no siempre éste es el caso. Por ejemplo, una calculadora de bolsillo funciona mediante circuitos eléctricos, por tanto, la base natural es 2, no 10, que corresponde a tener el circuito 'abierto' o 'cerrado'.

Formulemos otra pregunta: 1/9 parece un número racional bastante simple. ¿Cómo podemos expresarlo en el sistema decimal? Podríamos escribirlo como

$$\frac{1}{9} = \frac{10}{9}\frac{1}{10} = \frac{9+1}{9} \times \frac{1}{10} = \left(1 + \frac{1}{9}\right) \times \frac{1}{10} = 0,1 + \frac{1}{9} \times 0,1.$$

Grosso modo, la respuesta es 0,1. Sin embargo, hay otro término, que es precisamente 0,1 veces la fracción original. Si hacemos la división de este término explícitamente, nos encontramos de nuevo 0,1 (más un 'resto' de 1/9), aunque multiplicado por 0,1, es decir, 0,01. Cuando se suma este término al primero obtenemos

$$\frac{1}{9} \approx 0{,}11.$$

Si continuamos con el proceso (que es lo que hacías hace mucho tiempo cuando aprendiste a 'sumar divisiones largas'), el resultado será

$$\frac{1}{9} \approx 0{,}1111111111\cdots,$$

donde el número decimal se prolonga indefinidamente; el último dígito siempre es 1 y no hay forma de parar.

Ante tal situación, ¿qué significa decir $1/9 = 0{,}1111\bar{1}$ (donde la barra significa que los dígitos bajo la misma se repiten indefinidamente o son 'recurrentes')? Escrito como suma de fracciones decimales, podemos decir que

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots ,$$

que es la suma de un número *infinito* de términos cada vez más pequeños. Una suma como ésta se denomina **serie**. Si paramos después de n términos, eliminando aquéllos que siguen, obtendremos una *aproximación* a la fracción racional 1/9. El último término de la aproximación, por tanto, mejora la aproximación anterior (con sólo $n-1$ términos) por 10^{-n} —una pequeña corrección. En la expresión, el signo = significa simplemente que cuantos más términos consideremos, más cerca estaremos del número (1/9) que estamos buscando. Echando un vistazo a las distintas aproximaciones para $n = 1, 2, 3, \ldots$, queda claro que, con una cifra decimal, $1/9 > 0{,}1$ pero $< 0{,}2$; con dos cifras decimales, la fracción está entre $> 0{,}11$ y $< 0{,}12$; con tres cifras decimales, estará entre $> 0{,}111$ y $< 0{,}112$; y así sucesivamente. Los números como 0,111 y 0,112 se denominan **cotas**, siendo el primero una cota 'inferior' y el segundo una cota 'superior'. Las cotas superior e inferior marcan los extremos del *intervalo* dentro del cual sabemos que debe encontrarse el número en cuestión.

A pesar de sus acotaciones, buscar el número 1/9 es como intentar cazar un animal pequeño y muy resbaladizo; incluso si sabemos que puede representarse mediante un punto sobre una línea entre, por ejemplo, las cotas 0,111111 y 0,111112, aún no lo tendremos. Yendo más lejos, podemos decir que debe estar en algún lugar entre 0,1111111 y 0,1111112, pero eso aún no lo fija *exactamente*. Para encontrarse dentro de ese último intervalo, el número ha de ser muy pequeño, menor que 0,0000001 veces el tamaño de un paso (de otro modo no cabría dentro). De hecho, el número que estamos buscando se representa mediante un *punto*, el cual tiene anchura cero. Así, independientemente de lo pequeño que tomemos el intervalo siempre habrán millones y millones de números a cada lado del que nosotros queremos. El conjunto de intervalos, cada uno encerrando todos aquéllos que le siguen, se denomina **nido** de intervalos. Por tanto, cualquier número se puede definir de forma tan precisa como queramos, dando una receta para encontrar el nido en el que vive. La mayoría de los números no pueden expresarse como enteros o fracciones racionales. Se dice que son **irracionales** y generalmente se expresan como la suma de un conjunto infinito de términos. Ejemplos sencillos de números irracionales pueden proceder de las 'raíces' obtenidas mediante la resolución de la ecuación (4.5). Cuando $x^n = a$, la solución $x = a^{1/n}$ se llama 'raíz n–ésima' de a (ver sección 4.2). En general, estos números son **irracionales**.

Las raíces cuadradas se necesitan a menudo y son bastante difíciles de calcular mediante los métodos convencionales dados en los 'libros de texto' (mucho peor que divisiones grandes). Sin embargo, multiplicando y dividiendo puedes conseguir fácilmente muy buenas aproximaciones. Por ejemplo, toma $x = \sqrt{2}$, donde puedes estimar que la raíz ha de ser mayor que 1 (ya que $1^2 = 1$ es demasiado pequeño), pero menor que 2 (ya que $2^2 = 4$ es demasiado grande). Intenta con 1,5, que es el valor intermedio. Si divides 2 por 1,5, obtienes $1{,}33\bar{3}$; así, $1{,}5 \times 1{,}33\bar{3} = 2$, y el número que quieres (digamos x, tal que $x \times x = 2$) estará entre $1{,}33\bar{3}$ y 1,5. Ahora, el valor intermedio es $x \approx 1{,}416$. Si continuas del mismo modo, pronto encontrarás $x \approx 1{,}41421356$. Éste es el número que los griegos estaba buscando, pero que no pudieron encontrar.

El conjunto de números al que pertenecen todos los enteros (incluyendo el signo $\pm$ y el cero), las fracciones racionales y todos los números irracionales se denomina **sistema de números reales**. Éste es el sistema que los científicos tienen en mente cuando se refieren a los 'números ordinarios'. Diremos algo más sobre esto en el próximo capítulo.

Ejercicios

(1) Expresa las fracciones racionales 1/3, 2/3, 1/5 y 1/7 en forma decimal.

(2) Utiliza el método descrito en la última sección de este capítulo para encontrar el valor de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{7}$ con una precisión de 3 cifras decimales (es decir, tres dígitos tras la coma).

(3) Usa las raíces que has encontrado en el ejercicio anterior para obtener $\sqrt{6}$, $\sqrt{21}$ y $\sqrt{63}$, de nuevo con 3 cifras decimales. (Emplea el hecho de que $(ab)^m = a^m \times b^m$.)

(4) Intenta encontrar un método (similar al utilizado antes) para obtener la raíz *cúbica* de un número y utilízalo para calcular $\sqrt[3]{25}$. (Observa que el número que estás buscando debe ser algo menor que 3, ya que $3^3 = 27$.)

(5) Utiliza los resultados de la sección 4.2 para obtener formas más simples de los siguientes números:

$$a^2a^{-3} \qquad a^3/a^{-4} \qquad a^3/a^4 \qquad (a^2)^{1/2}$$

$$(a^3)^{1/2} \qquad \sqrt{a^3} \qquad \sqrt[3]{a^2} \qquad \sqrt[3]{a^3}$$

(6) Escribe los números 295 y 3106 como una suma de potencias de 10. Después, multiplica las potencias de cada uno de estos números utilizando la propiedad del producto de potencias y expresa el resultado en forma decimal.

(7) Haz lo mismo que en el ejercicio anterior, pero con los números 26,32 y 3,156.

(8) Supongamos que sólo tienes *dos* símbolos diferentes, el 1 y el 0 (en vez de los habituales diez dígitos 1, 2, ... , 9 y 0). Intenta expresar los números 7 y 17 en términos de potencias de 2. (Recuerda que $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, etc., y procede como hiciste en el ejercicio 2.) Los números que se escriben de esta manera se dice que se expresan en forma **binaria**. Por ejemplo, el número binario 101100 es $1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, que en el sistema decimal es $32 + 8 + 4 = 48$.

(9) ¿Cuál es tu edad (en años) expresada como un número binario?

(10) ¿Qué número es el número binario $abc{,}rst$ (donde a, b, c, r, s y t pueden tomar sólo los valores 0 ó 1) en el sistema decimal?

(11) Multiplica los números 7 y 17, expresados en forma binaria en el ejercicio 8, utilizando las propiedades del producto de potencias. Escribe el resultado en forma decimal.

(12) Multiplica los números binarios 101,11 y 110,01, y expresa el resultado final como un número decimal. (Ten en cuenta las respuestas que diste a los ejercicios 7 y 8.)

Capítulo 5

Números reales y números complejos

5.1. Los números reales y las series

El conjunto de todos los números encontrados hasta ahora (enteros negativos y positivos, incluido el cero, así como números racionales e irracionales) se denomina *campo de los números reales*. Sus elementos, los propios números, pueden combinarse mediante la suma (de acuerdo con las propiedades (2.1) y (2.2)) y la multiplicación (de acuerdo con (2.3) a (2.5)), lo que significa que el conjunto es un anillo (ver página 19). Éste se convierte en un **campo** cuando para cada número a (sin contar el cero) existe un *inverso* $1/a$ tal que $a \times (1/a) = 1$.

Nos ha llevado un largo camino alcanzar la idea de campo de los números reales —incluso sabiendo al comienzo cómo contar. Sin embargo, recordemos que la Humanidad tardó miles de años en llegar tan lejos. Además, a lo largo del camino hubo muchas paradas que parecieron poner fin a todo progreso. Hace más de 2000 años, por ejemplo, los griegos establecieron los fundamentos de la Geometría utilizando *representaciones gráficas* en vez de números para expresar sus ideas. Cuando vieron que no podían encontrar un número x tal que $x^2 = 2$ (que mide el *área* de un cuadrado con lados de longitud x), pararon la investigación pensando que las cantidades geométricas no se podían expresar de forma exacta mediante números. Por este motivo, los griegos desarrollaron de maneras tan marcadamente diferentes el Álgebra (la ciencia de los números) y la Geometría (la ciencia del espacio). Tuvieron que pasar casi 2000 años para que la idea de número *irracional*, definido en la última sección como el límite de un conjunto de aproximaciones cada vez mejores, derribase el muro entre ambas ciencias.

Hay muchas historias interesantes sobre la escuela de Pitágoras: es muy probable que los pitagóricos fueron quienes *inventaron* la 'geometría algebraica'. Sin embargo, sus creencias religiosas, según las cuales la Naturaleza sólo podía ser comprendida en términos de los números dados por Dios, era tan fuerte que prometieron mantener en secreto su descubrimiento. Volveremos a la geometría algebraica en el libro 2, donde hablaremos del espacio. Por ahora, para comprender mejor los números reales, echemos un vistazo de nuevo a la diferencia entre fracciones racionales, tales como p/q (tanto p como q son enteros), y un número irracional. La fracción racional 1/9 se escribió en el capítulo anterior como una suma de términos:

$$\frac{1}{9} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots,$$

donde el n–ésimo término es $a_n = 10^{-n}$; el **subíndice** 'n' simplemente muestra *qué* término tiene este valor. Los términos forman una **secuencia** a_1, a_2, a_3, $\ldots$, y su suma se denomina **serie**. Si retenemos sólo los primeros n términos, la serie da una aproximación de n términos a 1/9. Para obtener el valor exacto, en forma decimal, debemos continuar indefinidamente, extendiendo la 'suma a infinito'. Se dice que la serie **converge** al **límite** 1/9 cuando la suma hasta n términos se acerca al límite tanto como queramos para un valor suficientemente grande de n. Claramente, éste es el caso para un número representado mediante un decimal recurrente.

Otras series, que puede converger o no, proceden de tomar $a_n = x^{n-1}$, siendo x cualquier número que elijamos. La secuencia es entonces

$$a_1 = x^0 = 1, \quad a_2 = x^1 = x, \quad a_3 = x^2, \quad a_4 = x^3, \quad \ldots$$

y la serie es la suma

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Por ejemplo, si consideramos $x = 1/2$, obtenemos

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Para ver si la serie converge, echemos un vistazo a la suma hasta n términos,

$$S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1},$$

que puede calcularse fácilmente de forma exacta. Multiplicando S_n por x obtenemos

$$xS_n = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n,$$

y restando este resultado a S_n (dado en línea anterior) llegamos a

$$S_n - xS_n = 1 + (x - x) + (x^2 - x^2) + \ldots - x^n = 1 - x^n,$$

donde todos los términos entre el primero y el último se cancelan por pares. Esto da $S_n(1-x) = 1-x^n$. Dividiendo a ambos lados de esta última ecuación por $(1 - x)$, obtenemos finalmente

$$S_n = \frac{1 - x^n}{1 - x}. \tag{5.1}$$

Para cualquier número racional x, S_n también es un número racional. Por ejemplo, con $x = 1/2$ obtenemos $S_n = 2(1 - 2^{-n})$. La pregunta de interés es ahora: ¿converge la serie cuando tomamos $n \to \infty$ (leído, cuando 'n tiende a infinito', es decir, cuando se hace tan grande como queramos)? Claramente, la respuesta es sí, ya que el término 2^{-n} del numerador se hace prácticamente despreciable. Hay, por tanto, un límite

$$S_\infty = \frac{1}{1 - x}, \tag{5.2}$$

que tiene el valor entero 2 cuando $x = 1/2$. Esto implica que incluso un entero puede representarse mediante una serie infinita, como muestra el ejemplo anterior, de que se sigue que

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Por otra parte, para $x > 1$ la serie *no* converge. Por ejemplo, si pones $x = 2$, S_n dado por (5.1) adquiere valores cada vez más grandes, sin límite, a medida que n se hace cada vez más grande.

Finalmente, echemos un vistazo a una serie que no se corresponde a nada simple (ni un entero ni una fracción racional), a pesar de no parecer muy complicada. Esta serie es la expresión de un número *irracional* muy importante, denotado mediante el símbolo e^x, que para cualquier valor de x se define como

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \tag{5.3}$$

donde $n!$ es el número definido en la sección 1.2 (el producto de todos los enteros desde 1 hasta n). El número e se obtiene poniendo $x = 1$ en (5.3), siendo su valor

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots = 2,718281828\cdots \tag{5.4}$$

Éste es uno de los números más importantes de todas las Matemáticas.

En otros libros, más adelante, veremos muchas más cosas sobre el uso de las series. Sin embargo, aquí terminaremos con una última generalización del sistema numérico.

5.2. El campo de los números complejos

El campo de los números reales es adecuado para describir cualquier cosa que queramos medir; cada magnitud física equivale a un cierto *número* de unidades (como los 'pasos' usados en la p. 1 para medir las distancias) y ese número, que es la *medida* de la magnitud, pertenece al campo de los números reales. Sin embargo, las matemáticas van mucho más lejos: inventamos clases nuevas de números cuando intentamos responder a preguntas que parecían no tener respuesta (primero encontramos los números negativos, luego las fracciones racionales y finalmente los números irracionales). Pero hay todavía hay una pregunta que podemos formular: ¿cuál es el número x cuyo cuadrado, x^2, tiene un valor *negativo* (-1, por ejemplo)? En otros términos, ¿qué valor de x hace que $x^2 = -1$? Parece ser que esta pregunta se la hizo por primera vez Cardano, un matemático italiano, que la dejó recogida en un libro que escribió en 1545. No obstante, no fue hasta mucho más tarde (1777) cuando el famoso Euler le dio a la solución el nombre i, que aún se utiliza. Este número, $x = i$, se *define* mediante su propiedad

$$i^2 = -1, \tag{5.5}$$

y se denomina unidad 'imaginaria', un término que aparentemente fue utilizado por primera vez por Descartes para distinguirlo de los números reales $+1$ y -1, cuyo cuadrado es el mismo, $(+1)^2 = (-1)^2 = 1$. Sin embargo, en el caso de la unidad imaginaria, $(+i)^2 = (-i)^2 = -1$.

Una vez que disponemos del nuevo número i, lo tratamos como a cualquier otro número, suponiendo que satisface las mismas propiedades (2.1), (2.2), etc. Así, cualquier número real a tiene una pareja ai; mediante (2.3), esta pareja será igual a ia. Los números que contienen el símbolo i se llaman **números complejos**. Así, $z = x + iy$ es un número *complejo* en el que x e y son números *reales* ordinarios. Todos los números de esta forma pertenecen al *campo de los números complejos*. Este campo incluye también a los números reales, que son de la forma $x + iy$ con $y = 0$, y además es *cerrado* bajo las operaciones de suma y multiplicación. Es decir, combinando dos números complejos cualquiera (z_1 y z_2, con los subíndices indicando sus nombres completos), para la suma encontramos que

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{5.6}$$

que es precisamente otro número complejo. Por otro lado, usando las reglas para la reagrupación de resultados de la sección 2.2, para la multiplicación encontramos

$$z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1) \times (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2). \tag{5.7}$$

De nuevo, éste es, simplemente, otro número complejo de la forma $a + ib$, con una 'parte real' $a = (x_1x_2 - y_1y_2)$ y una 'parte imaginaria' ib con $b = (x_1y_2 + y_1x_2)$. Resumiendo, combinar números complejos siempre nos lleva a otros números del campo de los números complejos (nunca a nada *nuevo*). Observa que hay dos números complejos especiales, $0 = 0+i0$ y $1 = 1+i0$, que son la 'unidad de la suma' y la 'unidad de la multiplicación', respectivamente (como en secciones anteriores, donde no había parte imaginaria). Además, cada número complejo $z = x + iy$ tiene una 'pareja' $z^* = x - iy$ obtenida poniendo $-i$ en lugar de i. Esta pareja se denomina *complejo conjugado* de z y se indica mediante un 'asterisco'. A partir de cada número complejo también podemos encontrar un número *real*

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 - iyx + iyx - i^2y^2 = x^2 + y^2, \tag{5.8}$$

que se denomina **módulo al cuadrado** de z y se escribe $|z|^2$. Por tanto, $|z| = |z^*| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Con la invención de i podemos parar de buscar números nuevos (parece que ya no hay más preguntas que podamos formularnos que no se puedan responder en términos de los números pertenecientes al campo complejo. Recuerda, tuvimos que inventar números negativos para obtener una respuesta a la pregunta:

> Si $x + a = 0$ (siendo a un entero positivo), entonces ¿cuál es el valor de x? La solución de esta ecuación es un entero negativo $x = -a$. Y como 0 es la 'unidad de la suma' (puede sumarse a cualquier número sin cambiarlo), tenemos que $-a$ es el 'inverso respecto de la suma' de a.

Igualmente, el número 1 es la 'unidad de la multiplicación' y para inventar las fracciones comenzamos a partir de otra pregunta:

> Si $xa = 1$ (siendo a un entero positivo), entonces ¿cuál es el valor de x? La solución es $x = 1/a$, que es el inverso de a respecto de

la multiplicación. Utilizando la notación de (4.2) esto también se puede escribir como $x = a^{-1}$. De la misma forma, $xa^n = 1$ tiene la solución $x = a^{-n}$, que es el inverso de a^n, pues $a^n a^{-n} = a^0 = 1$.

Las soluciones a estas cuestiones se obtuvieron primero para el campo de los números reales. Sin embargo, *definiendo* el número i como una solución de la ecuación $x^2 = -1$ (que no sabíamos cómo resolver), podemos obtener ahora respuestas para todos los números del campo de los números *complejos*. Por ejemplo, si $z = x + iy$ es cualquier número complejo, tendrá un inverso z^{-1}, con partes real y compleja a e ib, respectivamente, siempre que podamos satisfacer la ecuación

$$zz^{-1} = (x + iy)(a + ib) = 1 + i0.$$

Sin embargo, dos números complejos serán iguales si y sólo si sus partes real y compleja son iguales *separadamente*. Realizando la multiplicación, esto significa que

$$xa - yb = 1 \text{ (parte real)} \qquad \text{y} \qquad xb + ya = 0 \text{ (parte compleja).}$$

La segunda ecuación nos dice que debemos elegir $b = -ya/x$. Esto podemos ponerlo en la primera ecuación para obtener $xa - (-y^2a/x) = 1$ o (multiplicando ambos lados por x) $(x^2 + y^2)a = x$. Así, encontramos la solución

$$z^{-1} = a + ib, \quad \text{con} \quad a = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad b = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Lo que hemos mostrado es que una ecuación que involucra una incógnita x ($= x^1$) (sin potencias, como x^2) tiene una solución siempre que permitamos que x tome un valor *complejo*. Tales ecuaciones se dice que son de 'primer grado' (o 'lineales'). Aquéllas que involucran x^2 son de 'segundo grado' (o 'cuadráticas'). Una ecuación más general es

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n = 0, \tag{5.9}$$

en la que la potencia más alta de x que aparece es el entero positivo n y los números a_0, a_1, $\ldots$, a_n son los **coeficientes** de las potencias de x. La ecuación (5.9) se denomina ecuación algebraica de 'grado n'. La expresión a la izquierda del signo = es una **polinomial** de grado n ('poli' significa 'muchos' y 'nomial', 'término'). Así, $x^2 + 1$ es una polinomial de segundo grado y $x^2 + 1 = 0$ es una ecuación cuadrática, cuya solución es $x = \pm i = \pm(-1)^{1/2} = \pm\sqrt{-1}$. Ahora, vayamos a algo más general.

5.3. Ecuaciones con soluciones complejas

Para ver cómo otras ecuaciones simples pueden tener soluciones que contienen a i, es suficiente mirar una ecuación algebraica de grado 2, escribiéndola como

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{5.10}$$

donde los coeficientes a, b y c son números reales y nosotros pretendemos encontrar el número desconocido x. El primer paso para conseguir una solución es dividir todos los términos por a y entonces sumar $-c/a$ a ambos lados del signo $=$. De este modo, obtnemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}. \tag{5.11}$$

Si tuviésemos $(\text{algo})^2$ a la izquierda podríamos decir que algo $= \sqrt{(-c/a)}$, como hicimos al resolver $x^2 = -1$ (aunque nuestro 'algo' es más complicado). No obstante, teniendo en cuenta que

$$(x + r)^2 = (x + r)(x + r) = x^2 + xr + rx + r^2 = x^2 + 2rx + r^2,$$

podemos elegir el número r como $r = \frac{1}{2}(b/a)$, lo que da

$$(x + r)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Sumando $(b/2a)^2$ a ambos lados, podemos reescribir ahora (5.11) de la forma

$$(x + r)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

obteniendo, así, la solución (para $x + r$ en vez de x) simplemente tomando la raíz cuadrada de la cantidad de la derecha. Recordando que $r = b/(2a)$ y expresando los términos de la derecha con un denominador común, obtenemos

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Finalmente, expresamos la solución de (5.10) de la forma

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{5.12}$$

Este resultado es muy importante, pues muestra que cualquier ecuación algebraica de grado 2, independientemente de los valores que asignemos a los coeficientes a, b y c, debe tener 2 soluciones, $x = r_1$ y $x = r_2$. Los dos valores, r_1 y r_2, procedentes de tomar los signos $+$ y $-$, respectivamente, en (5.12) se denominan **raíces** de la ecuación (5.10).

Regresemos ahora a la ecuación algebraica general (5.9). La última pregunta que vamos a hacer es: ¿para qué valores de x se satisface? Recuerda que, como estamos trabajando en el campo de los números *complejos*, tanto x como todos los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pueden ser complejos. Como demostró el gran matemático alemán Karl Friedrich Gauss, ésta es la 'última pregunta', ya que, cuando se admiten los números complejos, la ecuación (5.9) tiene exactamente n soluciones $x = r_1, r_2, \ldots, r_n$. Cualquiera de estos n números, las raíces, satisfacen la ecuación. Este resultado se denomina Teorema Fundamental del Álgebra.

Estamos al final del camino. Todas las ecuaciones algebraicas tienen soluciones en el campo de los números complejos, así que no hay *necesidad* de buscar nuevas clases de números. En la próxima (y última) sección, sin embargo, encontraremos otras cosas —*no números*— que pueden describirse utilizando símbolos de una nueva clase. Éstos nos llevarán a juegos nuevos con reglas nuevas. Incluso saliéndonos *fuera* del campo de los números, el camino aún continua.

Ejercicios

(1) Mira a la secuencia de términos:

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad a+3d, \ldots, a+nd,$$

donde el primer término es a y cada término precedente consiste en sumar la 'diferencia' d al anterior. ¿Cuál es el valor de la serie S_n que se forma a partir de los primeros n términos?

(2) Muestra, escribiendo los términos en orden inverso y añadiendo posteriormente las dos series juntas, término a término, que

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-2)d].$$

(Esta suma se denomina 'serie aritmética' de n términos.)

(3) ¿Cuál es el valor de la suma de los n primeros números naturales, $1 +$

$2 + 3 + ... + n$? A partir de tu fórmula, halla la suma de los números del 1 al 1000.

(4) La suma de los n primeros términos de la serie geométrica

$$A_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1}$$

viene dada por (5.1) y converge a un valor finito cuando x está entre 0 y 1. Si te dan otra serie,

$$B_n = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n-1},$$

¿qué puedes decir sobre ella? ¿converge para $n \to \infty$? (Compara los términos correspondientes para ver si uno es siempre menor que el otro.)

(5) Suma los siguientes pares de números complejos:

(a) $(2+3i)$ y $(3-5i)$ (b) $(2+3i)$ y $(3-2i)$ (c) $(2-3i)$ y $-(2+3i)$

(6) Multiplica los mismos pares de números complejos del ejercicio 5.

(7) Halla una fórmula para encontrar el producto de $z_1 = a+ib$ y $z_2 = c+id$, siendo a, b, c y d números reales cualquiera.

(8) Escribe el complejo conjugado, z^*, de cada uno de los números complejos: $z = 3 + 2i$, $z = 2 - 3i$ y $z = 3/(2 + i)$.

(9) Encuentra los resultados de las siguientes divisiones:

$$\frac{2+3i}{3-5i}, \qquad \frac{2+3i}{3-2i}, \qquad \frac{2-3i}{2+3i}.$$

(Observa que cualquiera de los denominadores multiplicados por su complejo conjugado da un número *real*.)

(10) Usar la fórmula (5.12) para encontrar las raíces de las ecuaciones:

$$x^2 + 3x - 1 = 0, \quad x^2 + 4x - 4 = 0, \quad 2x^2 + 5x + 2 = 0, \quad \frac{x^2}{4} - 3x + 25 = 0.$$

Denomina r_1 y r_2 a las dos raíces en cada caso y muestra que las ecuaciones cuadráticas pueden escribirse en *forma factorizada* $(x - r_1)(x - r_2) = 0$.

Capítulo 6

Más allá de los números: los operadores

6.1. Simetrías y grupos

Todo lo que vemos a nuestro alrededor son objetos que tienen **formas**. Algunas veces esas formas nos agradan y decimos que el objeto es bello. A menudo, la belleza está relacionada con la **simetría**. Piensa en una cara humana, donde cada rasgo a la derecha se ajusta exactamente con uno a su izquierda; o un palacio real donde por cada ventana a la derecha hay una exactamente igual a la izquierda; o una flor con cinco pétalos, cada uno exactamente igual a los demás. A primera vista, las formas parecen tener poco que ver con el contar o con los símbolos de cualquier clase. Sin embargo, al ir más allá de los números e inventar nuevos símbolos, nos encontramos con que incluso las formas también pueden ser descritas mediante las matemáticas.

Un ejemplo muy simple es el siguiente. Consideremos la letra T mayúscula de la Fig. 7(a), que puedes recortar de un trozo de cartón blanco para poder darle la vuelta y ver qué sucede con ella. La simetría del cartón depende del modo en que responda a ciertas **operaciones**. Si pudiésemos reflejarlo a través de la línea vertical de la Fig. 7(a), los 'brazos' izquierdo y derecho simplemente intercambiarían sus lugares y *después de la operación* el cartón se parecería exactamente a como era antes. Piensa en el cartón como si estuviese en dos 'estados' diferentes, antes y después de la operación, llamándolos S (antes) y S' (después) —observa que S y S' *no son números*, sólo los nombres de los dos estados. Lo que hace que la operación sea una *operación de simetría* es el hecho de que, hasta donde podemos apreciar (suponiendo que el cartón no tiene marcas sobre él que estropeen su simetría), nada ha cambiado.

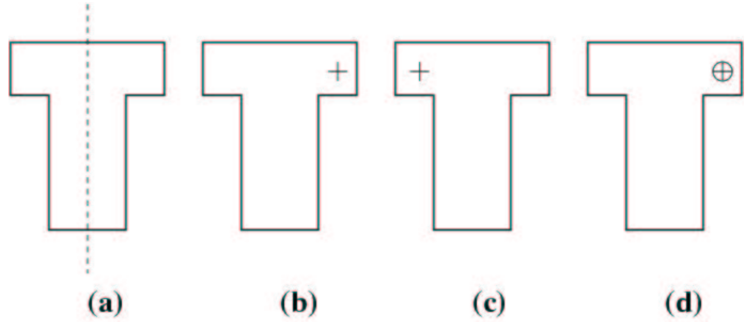


Figura 7

Expresado con palabras, podemos decir:

> El nuevo estado del cartón, tras reflejarlo a través de su línea vertical, no es diferente (hasta donde podemos apreciar) del estado del que partíamos.

Pero con símbolos, en vez de esto, podemos decir simplemente

$$S' = \mathsf{R}S = S$$

donde R denota al **operador** responsable de "la reflexión a través de un plano que corta la T en dos mitades iguales" (intercambiando izquierda y derecha). El 'caracter' especial R nos recuerda que el operador, de nuevo, *no es un número*. El signo =, como siempre, significa que no hay diferencia (hasta donde podamos apreciar) entre las magnitudes que separa, son 'iguales' o *equivalentes*.

La operación que acabamos de describir no es algo que puedas *hacer* tal cual. Ello implicaría considerar que la T se puede dividir en porciones muy pequeñas; entonces habría que llevar cada una de esas porciones a su posición reflejada, al otro lado de la línea de simetría, y volverlas a juntas (para que la T volviese a ser un todo). No obstante, lo importante es que podemos *imaginar* la operación de reflexión y que el cartón parecerá invariable bajo ésta.

Ahora, si una operación de simetría parece no dar lugar a ningún cambio, ¿cómo sabemos qué está sucediendo? Podemos utilizar un truco: pongamos una pequeña marca 'secreta', por ejemplo, +, en la esquina superior derecha del cartón, como en la Fig. 7(b). Esta marca no se contará como parte del cartón y no estropeará su simetría, pero nos permitirá 'seguir la pista' a todas las operaciones que realicemos. La operación de reflexión R, por ejemplo, nos enviará la marca a la esquina superior *izquierda*, como en la Fig. 7(c). Si usamos S^+ y ${}^+S$ (en vez de S y S') para denominar los estados antes y después de la reflexión, podemos decir que

$$\mathsf{R}S^+ = {}^+S = S^+.$$

Otra operación de simetría es la reflexión con respecto al plano del cartón, que intercambia las partes anterior y posterior. A esta operación la denominaremos R', la cual nos envía la marca *debajo* del cartón, directamente por debajo de la marca original + del lado de arriba. En la Fig. 7(d) la marca desplazada se muestra con un círculo como este $\oplus$ para indicar que está realmente debajo. Necesitaremos un símbolo nuevo para este nuevo estado. Usando $S^\oplus$, podemos decir

$$\mathsf{R}'S^+ = S^\oplus = S^+,$$

que muestra que el estado después de la reflexión es igual al que había antes (sin contar la marca) y, por tanto, que R' también es una operación de *simetría.*

Los resultados de las dos operaciones, R y R', son

$$\mathsf{R}S^+ = \ {}^+S \ (A), \qquad \mathsf{R}'S^+ = S^\oplus \ (B).$$

Ahora, intentemos *combinar* operaciones, tal como hicimos antes al ocuparnos de los números para encontrar sus 'propiedades de combinación'. Además, recordemos que haciendo exactamente lo mismo en ambos lados de una ecuación, éstos quedan igual. Por ejemplo, las dos operaciones de reflexión, R y R', pueden aplicarse dos veces cada una. Usando A y B, definidas antes, encontramos

$$\mathsf{RR}S^+ = \mathsf{R}\ {}^+S = S^+,$$

$$\mathsf{R}'\mathsf{R}'S^+ = \mathsf{R}'S^\oplus = S^+.$$

¿Cuál es el significado de todo esto? Pues simplemente que una reflexión, seguida otra vez por la misma reflexión, deja el cartón exactamente como estaba al principio. Repetir cualquiera de las dos operaciones dos veces es lo mismo que no hacer nada. Es decir, son equivalentes al operador **identidad** o **unidad**, denotado normalmente como E cuando hablamos de operaciones de simetría. Éste operador es una instrucción para dejar el cartón tal cual estaba. En este ejemplo, un símbolo tal como S^+ representa el estado del cartón sin importar cuál fuese el estado del que partíamos (como puedes comprobar fácilmente). Los operadores tienen, por tanto, su propia existencia. Así, nos olvidaremos del símbolo de estado y diremos que

$$\mathsf{RR} = \mathsf{E}, \quad \text{y} \quad \mathsf{R'R'} = \mathsf{E}. \tag{6.1}$$

Esto empieza a parecerse a lo que hicimos cuando inventamos números nuevos en el capítulo 3. Por tanto, usaremos la misma clase de lenguaje. Si el 'producto' de dos operadores es equivalente al operador unidad, se dice que cada uno de ellos es el 'inverso' del otro. En el lenguaje de operadores, se dice que aquéllos son 'auto–inversos'.

La mayor parte de este libro ha tratado sobre los 'números ordinarios' (incluso cuando utilizamos letras para representarlos) y pertenece a lo que se denomina hoy día "álgebra elemental". Sin embargo, ahora nos estamos moviendo hacia un álgebra 'superior' que incluye varios tipos de "álgebra abstracta".

Hay diferencias importantes entre el álgebra de los números ordinarios y el álgebra de operadores. Por ejemplo, sólo hay *un* número 1 que es su propio inverso ($1 \times 1 = 1$). Sin embargo, aquí tenemos *dos* operaciones de reflexión diferentes. Otra gran diferencia es que el *orden* en el que se realizan las operaciones puede ser importante, como verás en alguno de los ejercicios.

Apliquemos ahora R y $\mathsf{R'}$ *uno tras otro*. Esto nos dará otra operación,

$$\mathsf{RR'}S^{+} = \mathsf{R}S^{\oplus} = {}^{\oplus}S.$$

Por otra parte, aplicar $\mathsf{R'R}S^{+}$ nos da exactamente el mismo resultado. Sin embargo, el nuevo estado ${}^{\oplus}S$ podría haberse obtenido mediante una *única operación*: si *rotas* el cartón (en el estado S^{+}) media vuelta alrededor de la línea central de la T, verás que el + se ha desplazado desde el brazo derecho al izquierdo, pero *detrás* del cartón. El operador para rotar media vuelta se denota normalmente mediante C_2, donde el subíndice 2 significa que el operador tiene que aplicarse *dos veces* para conseguir una rotación alrededor de un círculo completo —que claramente devuelve el cartón a su estado original. Así, al igual que sucede con R y $\mathsf{R'}$, C_2 es un operador auto–inverso: $\mathsf{C}_2\mathsf{C}_2 = \mathsf{E}$.

Ahora que sabemos que dos reflexiones diferentes, una tras otra, pueden dar el mismo resultado que una única rotación, intentemos combinar una de cada (es decir, una reflexión y una rotación). Si primero aplicamos C_2 y a continuación R, comenzando a partir del estado S^{+} y teniendo en cuenta que la 'primera' operación es la que está más cerca del símbolo de estado (de manera que debes leerlas de derecha a izquierda), obtenemos

$$\mathsf{RC}_2S^{+} = \mathsf{R}\,{}^{\oplus}S = S^{\oplus}.$$

Si usamos primero R y después C_2, nos encontramos con el mismo resultado,

$$\mathsf{C}_2\mathsf{R}S^{+} = \mathsf{C}_2\,{}^{+}S = S^{\oplus}.$$

¿Qué hemos hecho hasta ahora? Hemos encontrado cuatro **operadores de simetría**

$$\mathsf{E},\ \mathsf{C}_2,\ \mathsf{R},\ \text{y}\ \mathsf{R}', \tag{6.2}$$

que, cuando se aplican sobre la letra T, la dejan invariable o (usando el término técnico) 'invariante'. Estos operadores describen la simetría del objeto, aunque no están relacionado únicamente a un objeto particular (en este caso, el cartón con la forma de T) —al igual que el hecho de contar no está ligado exclusivamente al objeto particular que se cuenta. Las propiedades de los cuatro operadores pueden estudiarse sin hablar del objeto al que se 'aplican'. C_2 aplicado dos veces es equivalente a E, es decir, "no hace nada" (*cualquiera que sea lo que se rota*). Los cuatro operadores juntos forman un **grupo** $\{\mathsf{E}, \mathsf{C}_2, \mathsf{R}, \mathsf{R}'\}$ en el que cada símbolo representa una cierta clase de operación geométrica sobre un objeto. En particular, este grupo se llama **grupo del punto** porque todas sus operaciones dejan intacto *al menos un punto* del objeto.

Los matemáticos van más lejos y ni siquiera requieren el uso de imágenes; piensan en los cuatro símbolos como los 'elementos' de un **grupo abstracto** (un conjunto de elementos con ciertas 'propiedades de combinación'), que es lo más abstracto que podemos llegar. Según los matemáticos, cualquier grupo debe poseer las siguientes propiedades: (1) dos elementos cualquiera puede combinarse (en el grupo de simetría esto son operaciones aplicadas una tras otra) para dar un tercero, que es 'equivalente' al 'producto' de los dos primeros; (2) el grupo debe ser 'cerrado' (como quiera que combinemos los cuatro símbolos, no podemos obtener nunca nada nuevo); (3) debe contener un elemento identidad o unidad E; y (4) para cada elemento (por ejemplo, R) debe existir un *inverso* (que a menudo se representa como R^{-1}, igual que en el álgebra 'ordinaria') tal que $\mathsf{R}\mathsf{R}^{-1} = \mathsf{E}$.

Parece que al ir del álgebra elemental a las álgebras abstractas hemos dejado bastante atrás los números ordinarios. Sin embargo, el campo de los números, tanto reales como complejos, casi siempre entra en juego. Por ejemplo, podemos poner juntos los elementos de un grupo abstracto con coeficientes tomados del campo de lo números complejos para obtener los elementos de un **álgebra de grupo** abstracta. Dado un grupo $\{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}\}$, la combinación

$$\mathsf{X} = a\mathsf{A} + b\mathsf{B} + c\mathsf{C} + d\mathsf{D},$$

donde a, b, c y d son números complejos cualquiera, es un elemento del álgebra del grupo.

No nos preocuparemos de más detalles. Basta con saber que lo que hemos hecho nos lleva a una de las áreas más importantes de las Matemáticas, la teoría de grupos, con cientos de aplicaciones en numerosas áreas de la ciencia.

6.2. Clasificando objetos en categorías

Supongamos que vamos a un mercado donde se venden animales. Por ejemplo, asnos (para llevar sacos de verduras), bueyes (para tirar de arados o carros pesados), vacas (para dar leche) y ponis (para montar a niños). Cada clase de animal pertenece a una 'categoría', de manera que podemos utilizar una letra para representar a los animales de cada una de estas categorías: a para los asno, b para los bueyes, etc.

Con palabras, podríamos querer decir "en el mercado hay 6 asnos, 4 bueyes, 8 vacas y 5 ponis". Éste es el 'estado' del mercado un día determinado (llamémosle S, al igual que hicimos al hablar del cartón con forma de T de la sección anterior). Podemos decir todo esto con símbolos escribiendo

$$S = 6\mathsf{a} + 4\mathsf{b} + 8\mathsf{c} + 5\mathsf{d}.$$

La idea de clasificar los animales en categorías puede expresarse ahora en términos de símbolos usando, por ejemplo, la letra A mayúscula par representar la *operación* de dejar únicamente los asnos y retirar los demás animales a algún otro lugar —'prohibidos' o 'no a la venta'. Como resultado de esta operación, se obtiene un nuevo estado del mercado, S', en el que los únicos animales en venta son los asnos. Si escribimos

$$S' = \mathsf{A}S = 6\mathsf{a},$$

S' es una 'muestra' que sólo contiene asnos. Si lo único que quiero son asnos, perfecto, hay 6. De igual modo, podríamos usar B para dejar sólo los bueyes. Así, si sólo quiero bueyes, $\mathsf{B}S = 4\mathsf{b}$ —de nuevo estoy contento, hay 4.

Cada una de las muestras es *pura*, pues contiene sólo los animales de una categoría (no hay asnos en una muestra de bueyes). Simbólicamente, esto se expresa como

$$\mathsf{A}(\mathsf{B}S) = \mathsf{A}4\mathsf{b} = 0.$$

Del mismo modo, no encontraremos bueyes entre los asnos, ya que

$$\mathsf{B}(\mathsf{A}S) = \mathsf{B}6\mathsf{a} = 0.$$

Sin embargo, operar de nuevo con A sobre la muestra $\mathsf{A}S = 6\mathsf{a}$ confirma que hay 6 asnos,

$$\mathsf{A}(\mathsf{A}S) = \mathsf{A}(6\mathsf{a}) = 6\mathsf{a} = \mathsf{A}S.$$

Resumiendo, tenemos

$\mathsf{AA}S = \mathsf{A}S$ ($= 6\mathsf{a}$) (6 asnos en una muestra de 6 asnos)

$\mathsf{AB}S = 0$ (no hay asnos en una muestra de bueyes)

$\mathsf{BA}S = 0$ (no hay bueyes en una muestra de asnos)

Igualmente sucede con el resto de animales, donde lo que hay que destacar es que

$$\mathsf{AA}S = \mathsf{A}S, \quad \mathsf{BB}S = \mathsf{B}S, \quad \mathsf{CC}S = \mathsf{C}S, \quad \ldots,$$

y que

$$\mathsf{AB}S = \mathsf{BA}S = \mathsf{AC}S = \mathsf{CA}S = \ldots = \mathsf{BC}S = \mathsf{CB}S = \ldots = 0,$$

donde 0 representa el mercado en el estado en el que *no hay* animales,

$$0 = 0\mathsf{a} + 0\mathsf{b} + 0\mathsf{c} + 0\mathsf{d}.$$

Por otra parte, sumando todas las muestras (los animales de las cuatro categorías), dejamos el mercado de nuevo en su estado original, con 4 asnos, 6 bueyes, 8 vacas y 5 ponis:

$$\mathsf{A}S + \mathsf{B}S + \mathsf{C}S + \mathsf{D}S = (\mathsf{A} + \mathsf{B} + \mathsf{C} + \mathsf{D})S = S.$$

Ninguno de estos resultados depende en modo alguno del 'estado' del mercado S, que puede contener cualquier número de animales de las distintas categorías. Así, $\mathsf{AA}S = \mathsf{A}S$ significa $\mathsf{AA} = \mathsf{A}$, independientemente del símbolo de estado S sobre el que actúen los operadores. Del mismo modo, $\mathsf{AB}S = 0 = \mathsf{0}S$, donde $\mathsf{0}$ representa al *operador cero*, que anula cualquier símbolo de estado sobre el que actúe. Finalmente, el último resultado se expresa $\mathsf{A} + \mathsf{B} + \mathsf{C} + \mathsf{D} = \mathsf{1}$, donde $\mathsf{1}$ es el *operador unidad*, que actúa sobre cualquier estado S sin cambiarlo.

Observa que todo empieza a parecerse un poco a lo que encontramos en la última sección, donde tratamos sobre los operadores de *simetría*. Hemos descubierto otra *álgebra de operadores* que contiene un $\mathsf{0}$, un $\mathsf{1}$ y los cuatro símbolos $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}$, cuyas propiedades se resumen como sigue

$$\mathsf{AA} = \mathsf{A}, \qquad \mathsf{BB} = \mathsf{B}, \qquad \mathsf{CC} = \mathsf{C}, \qquad \mathsf{DD} = \mathsf{D}, \tag{6.3}$$

$$\mathsf{AB} = \mathsf{BA} = \mathsf{0}, \quad \mathsf{AC} = \mathsf{CA} = \mathsf{0}, \quad \ldots, \quad \mathsf{CD} = \mathsf{DC} = \mathsf{0}, \tag{6.4}$$

y

$$\mathsf{A} + \mathsf{B} + \mathsf{C} + \mathsf{D} = \mathsf{1}. \tag{6.5}$$

Estas propiedades definen lo que los matemáticos denominan **conjunto espectral** —'espectral' en el sentido de que clasificar los animales en sus distintas clases es como crear un arco iris (un *espectro*) a partir de todos los colores diferentes que componen la luz 'blanca'.

Aunque parezca que sólo estamos jugando y lo que acabamos de describir no posee ninguna utilidad, es difícil concebir alguna parte de las Matemáticas que no sea útil en ciencia. En Física, por ejemplo, hubo dos grandes 'revoluciones' en el siglo XX que dieron lugar a muchos avances espectaculares en ciencia y tecnología. Por un lado, la teoría de la **relatividad** de Einstein (1905-1915), que cambió nuestra concepción del espacio, el tiempo y el universo. Por otra lado, la **teoría cuántica**, que comenzó en los años 20 del siglo XX y que cambió la forma de entender las partículas más pequeñas de la materia, como los **electrones** (que transportan la electricidad) y los **fotones** (que "llevan" la luz). Estas dos teorías dependen en gran medida de tales 'juegos'.

6.3. Discutiendo con símbolos: la lógica

Comenzamos este libro a partir de la noción de contar el número de objetos de un 'conjunto', donde el conjunto es una colección de objetos *cualquiera* y el número una 'propiedad' particular del conjunto, la misma para todos los conjuntos cuyos objetos pueden 'emparejarse' o 'ponerse en una correspondencia uno a uno'. Desde entonces hemos recorrido un largo camino. Los 'objetos' no tienen por qué ser cosas que puedas coger o tocar; pueden ser simplemente ideas o nombres (como los mismos números 1, 2, 3, ...), 'operaciones' (como aquéllas de las que hablábamos en la sección anterior) o incluso 'cualidades' (como bueno o malo). Todos estos conceptos pueden representarse mediante *símbolos* con ciertas leyes de combinación. Además, con el transcurso de los años ha tomado forma una rama muy importante de las Matemáticas, la **teoría de conjuntos**, que puede aplicarse para resolver problemas donde nunca creerías que las Matemáticas podrían ser de utilidad —problemas sobre la forma en que la gente piensa, razona o intenta hacer juicios lógicos.

Georg Cantor(1845-1918) fue un matemático alemán a quien se le concede el crédito de haber inventado la teoría de conjuntos durante el último cuarto del siglo XIX. Sin embargo, los fundamentos fueron establecidos mucho antes por George Boole (1815-1864). Éste nunca tuvo estudios universitarios. Comenzó su vida profesional como 'ayudante de maestro de escuela' (a la edad de 16 años) y más tarde abrió una escuela por sí mismo; durante su tiempo libre trabajó en Matemáticas. Sus trabajos se publicaron y fue invitado a Cork (Irlanda) en 1849 como profesor de Matemáticas. En 1854 escribió un importante libro titulado "Las leyes del pensamiento" donde hizo uso de su propia teoría de conjuntos.

Un **conjunto** es cualquier colección de miembros distintos o 'elementos' con algún significado bien definido. Por ejemplo, pueden ser las diferentes letras necesarias para escribir "teoría de conjuntos" ($t, e, o, r, i, a, d, c, n, j, u, s$; cada letra aparece sólo una vez a pesar de que algunas de ellas se repiten varias veces). Al conjunto se le asigna un nombre (por ejemplo, L) y puede definirse de dos formas distintas: (1) podemos *poner en una lista* los elementos, mostrándolos (o sus nombres) entre llaves (el orden de los elementos no importa), o (2) podemos nombrar un elemento general x, por ejemplo, y dar una *receta* para decidir si x pertenece al conjunto. En el caso de las letras de nuestro ejemplo, el conjunto puede definirse como $L = \{a, c, d, e, i, j, n, o, r, s, t, u\}$, según el método de 'listas', o como $L = \{x|x =$ una letra necesaria para escribir las palabras "teoría de conjuntos"$\}$, según el método de 'receta' (la línea vertical | simplemente separa x de la receta). Para decir que un elemento x "pertenece a" o está "contenido en" el conjunto L utilizamos un símbolo $\in$ (como la letra griega 'epsilon'). De esta manera, $t \in L$ significa que 't' es una de las letras del conjunto L. Para decir que un elemento *no* pertenece al conjunto usamos el símbolo $\notin$. Así, claramente, $z \notin L$.

Hay dos conjuntos con nombres especiales. Siempre existen un 'conjunto vacío', denotado por $\emptyset$, que no contiene *ningún*, y un 'conjunto universal', denotado por U, que contiene *todos* los elementos sobre los que queramos hablar. Aunque por lo general nos ocupamos de conjuntos más o menos limitados, U puede contener todos los elementos de todos los conjuntos. En el ejemplo anterior, podemos considerar que U es el conjunto A de todas las letras del alfabeto, que es 'universal' si estamos hablando de la escritura en español. En tal caso, todos los elementos de L son también elementos de A. Cuando todos los elementos de un conjunto B están contenidos en otro conjunto A escribimos $B \subset A$ (dicho con palabras, B es un 'subconjunto' de A); en nuestro ejemplo, $L \subset A$.

No necesitamos muchos más signos 'extravagantes' del tipo $\in$ ó $\subset$. Por ejemplo, si todos los elementos de B están contenidos en A y *vice versa* (es decir, todos los elementos de A también están contenidos en B), los dos conjuntos deben ser exactamente el mismo. Mediante símbolos,

$$\text{si} \quad B \subset A \quad \text{y} \quad A \subset B \quad \text{entonces} \quad A = B,$$

donde el signo $=$ tiene el significado de siempre.

Consideremos ahora la *combinación* de conjuntos, tal como hicimos al es-

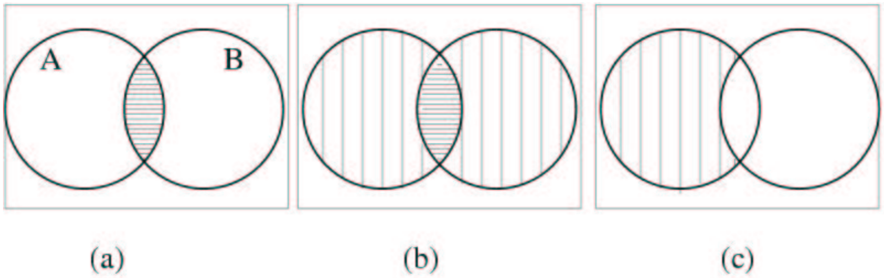


Figura 8

tudiar las propiedades de los números ordinarios. Para ello, resulta de gran utilidad emplear una representación gráfica para referirnos a los conjuntos que se debe a John Venn (1834-1883), el inventor del **diagrama de Venn**. Dibujamos una gran caja para representar el conjunto universal U y, dentro de él, un número de círculos para indicar los conjuntos A, B, $\ldots$ de los que queremos hablar. Cualquier miembro de un conjunto A puede representarse asignando un punto etiquetado dentro del círculo correspondiente.

Los dos métodos principales de combinar dos conjuntos se muestran en la Fig. 8. En ambos casos los círculos etiquetados como A y B deben solaparse, ya que de lo contrario los conjuntos están separados. En este último caso se dice que los conjuntos son 'disjuntos'.

En la Fig. 8(a), el área sombreada representa la **intersección** de los conjuntos A y B. Cualquier punto dentro de este área representará un elemento que pertenece a *ambos* (A y B). Para decir esto mediante símbolos, utilizamos $\cap$ para la 'intersección' y (usando el lenguaje que ya hemos introducido) escribimos

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Dicho con palabras, "la intersección de los conjuntos A y B es el conjunto que contiene los elementos x tales que x pertenece al conjunto A *y* x pertenece al conjunto B".

En la Fig. 8(b), el área sombreada contiene los puntos que representan los elementos que pertenece a A *ó* B ó *ambos* (A y B), donde la última condición de las tres aparece con un sombreado más oscuro. El símbolo que se usa para indicar esta **unión** de dos conjuntos es $\cup$ y la definición es

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B \text{ o } x \in \text{ambos}\}.$$

La *diferencia* entre dos conjuntos se indica en la Fig. 8(c); $A-B$ es el conjunto cuyos elementos pertenece a A, pero *no* a B. El signo menos significa que están excluidos de B. De nuevo, el área sombreada muestra el resultado.

Las 'leyes' para hacer álgebra con conjuntos son similares a aquéllas usadas con los números en el capítulo 2. Aquí sólo las enunciaremos en una lista para mostrar cómo son, sin embargo vamos a ver cuán sencillo es ilustrarlas mediante el uso de los diagramas de Venn. Para cada clase de combinación hay una **propiedad commutativa**, como la dada mediante (2.1) para los enteros, y también una **propiedad asociativa**, similar a (2.2). Estas cuatro primeras leyes son

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$ (el orden no importa en ningún caso)
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ni tampoco el modo de 'agrupar')

Cuando $\cap$ y $\cup$ aparecen en una combinación de tres conjuntos, se da una nueva clase de **propiedad distributiva**:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

donde la primera igualdad nos recuerda su análoga para números: $a(b+c) = ab + ac$.

Todas estas propiedades se derivan de las definiciones. En vez de intentar demostrarlas directamente, es más sencillo verificarlas mediante los diagramas. La Fig. 9, por ejemplo, muestra las representaciones gráficas correspondientes a los dos lados de la última igualdade. El área rodeada por la línea más gruesa en (a) corresponde a la unión de A y $B \cap C$, y, por tanto, representa $A \cup (B \cap C)$. La Fig. 9(b) muestra la intersección de $A \cup B$ (sombreada mediante líneas verticales) y $A \cup C$ (sombreada mediante líneas horizontales). La región con sombreado horizontal y vertical indica su intersección. Las dos áreas señaladas de esta manera in (a) y (b) son, claramente, idénticas. Esto confirma que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

A menudo es útil introducir el **complemento** de un conjunto. Si A es cualquier conjunto que contiene los elementos $\{a_1, a_2, \ldots\}$, éste será un subconjunto del conjunto universal U, representado por una caja grande con A (y cualesquiera otros conjuntos) dentro de él. Definimos el complemento de A, denotado por A', como el subconjunto de elementos que *no son* miembros de

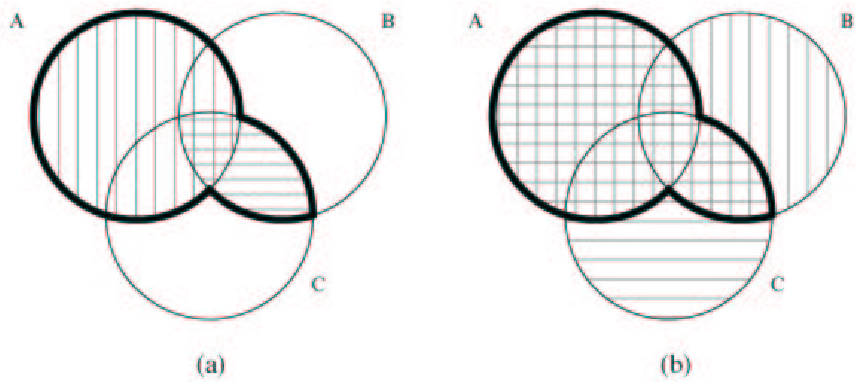


Figura 9

A. Este subconjunto está representado por la parte de la caja que está *fuera de* A. A partir de esta definición es obvio que

$$A \cap A' = \emptyset, \qquad A \cup A' = U.$$

Otros resultados que involucran a $\emptyset$, U y el complemento de un conjunto se pueden confirmar fácilmente mediante los diagramas correspondientes. Estos se enumeran a continuación:

- $A \cap A = A, \qquad A \cup A = A, \qquad A \cup \emptyset = A$
- $A \cap U = A, \qquad A \cup A' = U, \qquad A \cap A' = \emptyset.$

Todos estos resultados son lo que puedes esperar cuando consideras diagramas. Por completitud, en caso de que los necesites alguna vez, hay dos resultados más (un poco menos obvios que los anteriores), denominados "leyes de Morgan":

- $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Aplicaciones del álgebra de conjuntos

En el caso de que pienses que esto es apartarse demasiado de la vida real como para que pueda ser útil, vamos a echar un vistazo a un problema que nos podría surgir y que es difícil de resolver sin usar símbolos o diagramas.

Ejemplo

Un contratante realiza una propuesta para construir una carretera. Tiene un equipo de construcción y todo la maquinaria pesada que necesita (cemento, camiones hormigonera, excavadoras, grúas, etc.). Dice que tiene que pagar a los 70 obreros de su equipo conforme a la tarea que éstos realicen: 30 pueden conducir un camión hormigonera, 35 pueden trabajar con las excavadoras y 22 pueden operar con las grúas. No obstante, algunos pueden realizar más de un trabajo y, por tanto, tienen que recibir un salario mayor: 14 pueden utilizar tanto una hormigonera como una excavadora, 10 pueden manejar una excavadora y una grúa y 4 pueden trabajar con los tres (y deberán recibir el mayor salario). El contratante, ¿dice la verdad o está mintiendo? (para conseguir más dinero).

Para obtener la respuesta, utilizaremos B para designar al conjunto de obreros que pueden usar una excavadora, C para aquéllos que pueden usar una grúa y M para los que pueden conducir una hormigonera. Hay tres conjuntos básicos, que representamos mediante tres círculos en la Fig. 10. éstos deben solaparse, ya que algunos obreros pueden realizar más de una tarea (es decir, son miembros de más de un conjunto). Las áreas etiquetadas como b, c y m harán referencia a los obreros que sólo puedan realizar una de las tres tareas. Además, también utilizaremos b para designar el *número* de aquéllos que sólo pueden llevar una excavadora y así sucesivamente con el resto. Las áreas etiquetadas como p, r y s hacen referencia al solapamiento de dos conjuntos y a los números correspondientes de obreros que pueden realizar *dos* trabajos. Finalmente, q será el número de los que pueden realizar las tres tareas.

Ahora comenzamos a colocar los números que nos ha dado el contratante. Sólo 4 obreros pueden realizar los tres trabajos y, por tanto, sólo éstos pertenecen a los tres conjuntos (pertenecen al área donde los tres círculos se solapan). Este área corresponde a $B \cap C \cap M$ y es un subconjunto con q miembros, de manera que decimos $q = 4$. El área de solapamiento de B y C corresponde a $B \cap C$, que es el subconjunto que tiene $p + q$ elementos; el contratante dice que $p + q = 10$. Como sabemos que $q = 4$, esto significa que $p = 6$. Del mismo modo (verifícalo por ti mismo) $B \cap M$ tiene $r + q$ elementos, así que $r = 10$, y $C \cap M$ tiene $s + q$ elementos, de manera que $s = 6$. El número de obreros que pueden realizar *más de* un trabajo es, por

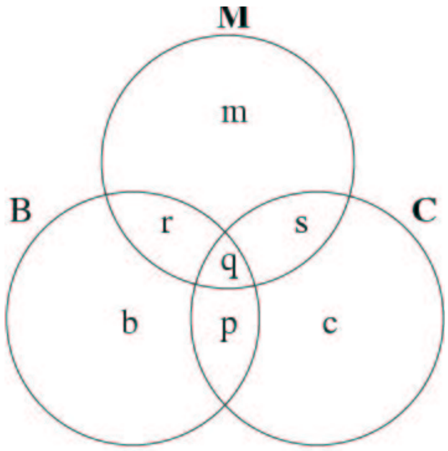


Figura 10

lo tanto, $p + q + r + s = 26$. Ahora, nos dijeron que 33 obreros pueden llevar una excavadora, es decir, $b + p + q + r$, lo que significa que $b = 33 - 20 = 13$. De igual modo, encontramos que $c = 6$ y $m = 15$. El número de obreros que pueden realizar *únicamente* un trabajo es $b + c + m = 34$. Teniendo en cuenta lo anterior, el número total de obreros que trabajan en el proyecto es $34 + 26 = 60$. Como el contratante nos dijo que tenía que pagar salarios a *setenta* obreros, no a sesenta, es obvio que nos está intentado engañar.

La teoría de conjuntos tiene muchas aplicaciones hoy día; aparece en todos los campos donde se tienen que tomar decisiones lógicas, tanto en negocios y administración como en el diseño de circuitos eléctricos (donde el álgebra booleana, la gran invención de George Boole, se utiliza ampliamente). Sin embargo, algunas de sus aplicaciones más difíciles e importantes están en las propias raíces de las Matemáticas. Por ejemplo, cuando hablábamos sobre el número, comenzamos a partir de la noción de contar y de los 'números naturales' (los enteros positivos sin el cero). Las 'propiedades de combinación' aparecieron entonces como una consecuencia de pensar en conjuntos *finitos*, conjuntos de cuentas o ladrillos que podían ser contados fácilmente. A partir de este punto fuimos avanzando hacia el campo de todos los números reales sin decir nada más sobre los fundamentos, incluso a pesar de que la cantidad de números (representados en capítulos anteriores mediante puntos sobre una línea) era tal que no podía ser contada nunca. Ocuparse de conjuntos que contienen tantos elementos que estos no pueden contarse presenta problemas tan profundos que sólo los matemáticos profesionales pueden entenderlos. Éste es el punto donde nosotros vamos a parar.

Ejercicios

(1) ¿Forma un grupo el conjunto de los enteros (todos los números positivos y negativos, incluyendo el cero) con la suma como propiedad de combinación? ¿Qué sucede si retiramos el cero?, ¿Y si sólo usamos los números pares (2, 4, 6, ...)?

(2) Recuerda las 'tablas de multiplicar' en aritmética (sección 2.2). Podemos generar tablas similares para los grupos de simetría. Si los elementos del grupo se denominan $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, ...$, la tabla de multiplicar del *grupo* será

	A	B	C	D
A	AA	AB	AC	AD
B	BA	BB	BC	BD
C	CA	CB	CC	CD
D	DA	DB	DC	DD

donde, por ejemplo, BC representa la entrada correspondiente a la fila B y la columna C. Para el grupo de simetría estudiado en esta sección, construye la tabla de multiplicar desarrollando todos los productos.

(3) Corta un trozo cuadrado de cartón con la parte de abajo pintada de color negro y estudia las operaciones de simetría que lo dejan exactamente igual (pon una pequeña + al frente, en la esquina superior derecha, de manera que puedas ver lo que sucede). ¿Cuántas operaciones de reflexión hay? ¿Y cuántas rotaciones? (Puedes usar los símbolos C_2 y C_4 pare representar las rotaciones de media vuelta o un cuarto de vuelta alrededor de un eje, y R_1, R_2, R'_1 y R'_2 para las distintas reflexiones.) Di claramente qué produce cada operación.

Después, construye la tabla de multiplicar tal como hiciste en el ejercicio 3, encontrando la única operación de simetría equivalente a XY para el producto en la fila X y columna Y (haciendo esto para cada producto). ¿Puedes encontrar alguna regla para combinar las rotaciones entre sí, las rotaciones con las reflexiones, y así sucesivamente? ¿Hay algún par para el que XY e YX no sean iguales?

(4) Considera que hay 40 estudiantes en una clase y que sus alturas son las siguientes:

4	están entre	1 m 5 cm	y	1 m 10 cm
8	están entre	1 m 10 cm	y	1 m 15 cm
13	están entre	1 m 15 cm	y	1 m 20 cm
12	están entre	1 m 20 cm	y	1 m 25 cm
3	están entre	1 m 20 cm	y	1 m 25 cm

Los números de estas cinco categorías muestran el 'estado' de la clase. ¿Cómo puedes representar esto mediante símbolos?

(5) Usa A, B, C, D y E para designar los 'operadores' que representan a los estudiantes de las cinco categorías del ejercicio anterior. ¿Qué operadores (denominarlos U y V) seleccionarían a los estudiantes por debajo (U) y por encima (V) de 1 m 20 cm? ¿Qué propiedades tendrían? (por ejemplo, $\mathsf{UU} = ?$)

Una mirada hacia atrás

Hemos comenzado prácticamente a partir de nada (solamente unas pocas nociones sobre contar) y hemos llegado bastante lejos. Hagamos un resumen:

- Los capítulos 1 y 2 deben haberte recordado la época cuando aprendiste los números por primera vez (en tu niñez, cuando cantabas un sinfín de veces las tablas de multiplicar), aprendiendo sin comprender. Sin embargo, ahora sabes lo que *significa* todo. Las reglas de la aritmética están hechas por *nosotros* para ayudarnos a comprender y usar lo que vemos a nuestro alrededor. Ahora sabes que puedes utilizar *cualquier* símbolo en lugar de números y que también puedes escribir las reglas de la aritmética usando únicamente los símbolos; estás haciendo **álgebra**.

- En el capítulo 3 te encontraste con las **ecuaciones**, que contienen un número que desconoces (llámalo 'x'), junto con los enteros $(1, 2, 3, \dots)$. Al **resolver** las ecuaciones encontraste nuevos números (el cero, 0, y los números negativos, -1, -2, ...). Además, también viste la utilidad de las *representaciones gráficas* para hablar sobre los números y sus propiedades, y cómo se podía asignar un número a cualquier punto sobre una recta, extrayendo de aquí el concepto de **fracción** como el número que etiqueta a los puntos que hay entre los números enteros.

- Sin embargo, entre dos de tales números ('fracciones racionales' de la forma a/b), *independientemente de lo cercanos que estén*, había aún millones de números que no puedes representar de una manera sencilla; te puedes acercar tanto como quieras, pero sin alcanzar nunca ese número. Un número 'irracional' se define sólo mediante la *receta* que dice cómo alcanzarlo; eso es todo. El conjunto de todos los números definidos hasta aquí se denominaba **campo de los números reales**, el cual es suficiente para las necesidades cotidianas (como el medir).

- El último gran paso se llevó a cabo en el capítulo 5, cuando admitimos al último número 'nuevo', denotado por i y denominado "unidad imaginaria", con la propiedad $i \times i = -1$ (*no* 1). Cuando se incluyó i y se le permitió mezclarse con todos los números reales, nuestro campo de números tuvo que ampliarse para incluir los **números reales** y los **números complejos**. Todas las ecuaciones que involucran tales números se pueden resolver sin inventar nada nuevo; el campo está *cerrado*

- En el último capítulo, sin embargo, viste que los símbolos podían usarse para representar otras cosas, no sólo números. Pueden usarse para realizar **operaciones**, como mover cosas en el espacio, clasificar una mezcla de objetos en objetos 'de una misma clase' o, simplemente, para discutir sobre las cosas.

Índice

Álgebra, 24
  abstracta, 47
  booleana, 57
  de conjuntos, 54
  de grupo, 48
  de números, 24
  de operadores, 50
  Teorema Fundamental del, 42
Anillo (conjunto de símbolos con ciertas propiedades), 19
Asociar (para establecer una conexión), 11

Campo, 35
  de los números reales, 35
  de los números reales, 38
Categoría, 49
Cero, (0) 6
Cierre, 19
Coeficiente, 40
Combinación, 10
  mediante la suma, 10
  mediante la multiplicación, 12
Complemento (de un conjunto), 54
Concepto, 16
Conjunto espectral, 51
Convergencia (acercarse más y más), 36
Correspondencia (uno a uno), 4
Cotas (superior e inferior), 32

Denominador, 25
Dígito (uno de los símbolos 0, 1, 2, ... 9), 6
Distancia, 1

Ecuación, 16
Eje, 20
Electrón, 51
Equivalencia, 2
Exponente, 29

Factorial, 6
Fotón, 51
Fracción, 23
  racional, 23
    en el sistema decimal, 27

Generalizar, generalización, 16
Grupo, 48
  abstracto, 48
  álgebra de, 48
  de simetría, 48
  del punto, 48

Intersección (de conjuntos), 53
Intervalo, 27
Inverso, 18
  respecto de la multiplicación, 23
  respecto de la suma, 18
  respecto de la potencia, 30
  de un operador, 47

Kilogramo, 2

Límite, 35
Lógica, 51

Magnitud (de algo que mides), 1
Masa, 2
Medida, 1
Metro, 1
Módulo (de un número complejo), 39
Multiplicar, multiplicación, 11
  tabla de (números), 14
  tabla de (grupos), 58

Naturaleza abstracta (con existencia sólo conceptual, no objetiva; naturaleza simbólica), ii
Nido (de intervalos), 32
Numerador, 15
Número,
  binario, 33
  cardinal, 4
  complejo, 38
  decimal, 28
  entero, 16
    negativo, 18
    positivo, 18
  natural, 6
  irracional, 32
  ordinal, 4

Operación, i
Operador, 45
  cero, 50
  de simetría, 48
  identidad, 46
  unidad, 50
Origen, 20

Permutación, 6
Polinomial, 40
Potencia (de un número), 29
Propiedad,
  asociativa, 11
    para conjuntos, 54
  conmutativa, 11
    para conjuntos, 54
  de combinación, 11
  distributiva, 12
    para conjuntos, 54

Raíz,
  cuadrada, 30
  de una ecuación, 42
Representar, 20
Restar, 18

Secuencia, 36
Serie, 32
Símbolo, 4
Simetría (de formas), 44
Sistema,
  de los números racionales, 24
  de los números reales, 33
  decimal, 27
  métrico, 1
  MKS o Internacional, 2
Solución, 16
Subíndice, 36
Suma, 10

Teoría,
  cuántica, 51
  de conjuntos, 51
  de grupos, 49
  de la relatividad, 51

Unidad (de medir), 1
Unión (de conjuntos), 53
Unidad,
  respecto de la suma, 22
  respecto de la multiplicación, 23

Vector, 21
Diagrama de Venn, 53