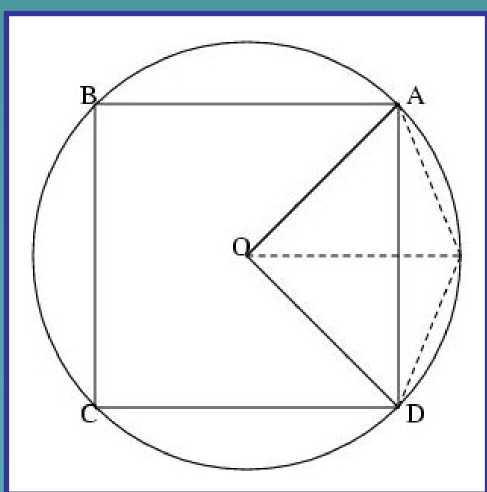
Libros Básicos de Ciencia

Libro 2

El espacio: De Euclídes a Einstein



Roy McWeeny

LIBROS BÁSICOS DE CIENCIA

Una colección que comienza *desde lo más elemental*

Libro 2. El espacio: De Euclídes a Einstein

Roy McWeeny
Profesor Emérito de Química Teórica, Universidad de Pisa, Pisa (Italia)

Traducido del original en inglés por Ángel S. Sanz Ortiz
Instituto de Física Fundamental "Blas Cabrera", CSIC, Madrid (España)

Todos los libros de la colección son de *distribución totalmente gratuita* y están disponibles en la red, visitando los sitios *web*:

www.paricenter.com (en 'Basic Books in Science')

www.learndev.org (en 'For the Love of Science')

LIBROS BÁSICOS DE CIENCIA

Sobre esta colección

Todo progreso humano depende de la **educación**, y para conseguirlo necesitamos libros y centros de enseñanza. La Educación Científica es una de las grandes piezas clave del progreso.

Desgraciadamente, no siempre es sencillo disponer de libros y centros de enseñanza. No obstante, con ayuda de la tecnología moderna, hoy en día todo el conocimiento acumulado a nivel mundial está al alcance de cualquiera a través de los enormes bancos de datos disponibles en la Red (la 'red' que conecta los ordenadores de todo el mundo).

La colección "Libros Básicos de Ciencia" está orientada a explotar esta nueva tecnología, poniendo al alcance de cualquier persona el conocimiento básico en todas las áreas de la ciencia. Cada libro cubre, con cierto grado de profundización, un área bien definida, partiendo de los conocimientos más básicos y alcanzando un nivel de acceso a la Universidad, y se encuentra a disposición totalmente gratuita en la Red, *sin coste alguno para el lector*. Para obtener una copia debería ser suficiente con hacer una visita a cualquier biblioteca o lugar público donde haya un ordenador personal y una línea telefónica. Cada libro servirá, así, como uno de los "bloques" sobre los que se construye la Ciencia, y todos juntos constituirán una biblioteca científica 'de ganga'.

Sobre este libro

Este libro, al igual que los otros de la colección, está escrito en un inglés sencillo[1], el lenguaje más utilizado en ciencia y tecnología. Aquí se aborda el siguiente gran paso tras los "Números y símbolos" (el tema de estudio del libro 1), partiendo de nuestras primeras nociones sobre la medida de la distancia y las relaciones entre objetos en el espacio. Mira hacia atrás, al trabajo de los filósofos y astrónomos que vivieron hace dos mil años, y se extiende hasta Einstein, cuyo trabajo puso los cimientos de los fundamentos de nuestras ideas actuales sobre la propia naturaleza del espacio. Éste es sólo un pequeño libro y no sigue el desarrollo histórico, comenzando a partir de la geometría tal como la propuso Euclides (como la aprendimos en el colegio). Sin embargo, se persigue suministrar una manera más fácil y rápida de adquirir los conocimientos necesarios en Física y otras ciencias relacionadas.

[1]El libro que tienes delante es una traducción al español del original, en inglés.

Un vistazo previo

Al igual que en el primer libro de la colección, el temario del libro 2 cubre más de dos mil años de descubrimiento. Trata de la ciencia del espacio, la **geometría**, partiendo de los filósofos griegos, Euclides y muchos otros, y alcanzando el presente, cuando se habla de los viajes en el espacio y el tiempo hasta en los periódicos y prácticamente todo el mundo ha oído hablar de Einstein y sus descubrimientos.

Euclides y su escuela no confiaban en el uso de los números en la geometría (viste por qué en el libro 1). En su lugar, utilizaban representaciones gráficas. Sin embargo, has aprendido cosas que ellos no sabían y que, como vas a ver, utilizando los números y el álgebra irás más lejos y más rápido. De nuevo, pasarás muchos 'hitos':

- En el capítulo 1 comenzarás con el concepto de distancia, expresada como un número de **unidades**, y verás cómo las ideas de Euclides sobre las líneas rectas, los ángulos y los triángulos pueden 'traducirse' en declaraciones sobre distancias y *números*.

- La mayor parte del trabajo de Euclides estuvo relacionado con la geometría del **plano**. Sin embargo, en el capítulo 2 verás cómo cualquier punto del plano se puede fijar dando dos números y cómo las líneas se pueden describir mediante ecuaciones.

- Las ideas de **área** y **ángulo** se derivan directamente de la geometría del plano (en el capítulo 3). Encontrarás cómo obtener el área de un círculo y cómo medir ángulos.

- El capítulo 4 es difícil, ya que reúne muchas nociones diferentes, la mayoría del libro 1. **Operadores**, **vectores**, **rotaciones**, **exponenciales** y **números complejos**, todos estos elementos están interconectados.

- Los puntos que *no* están sobre el mismo plano están en el **espacio tridimensional** (necesitas *tres* números para decir dónde están). En el capítulo 5 verás que la geometría en el espacio tridimensional es como la del espacio bidimensional y que parece más sencilla cuando usas vectores.

- Las formas planas, tales como los triángulos, tienen propiedades como el área, el ángulo y la longitud de sus lados que no cambian si las desplazas en el espacio. Éstas propiedades pertenecen a la propia forma y se denominan **invariantes**. Euclides utilizó tales ideas continuamente.

Ahora, tú irás de los espacios bidimensionales a los tridimensionales, donde los objetos también tienen **volumen**. Incluso así, todavía puedes hacer todo sin la necesidad de representaciones gráficas.

- Tras dos mil años se alcanzó el último gran hito (capítulo 7): se encontró que la geometría de Euclides estaba muy cerca de ser, *pero no lo era*, perfecta. Entonces querrás saber cómo Einstein cambió nuestras ideas.

CONTENIDO

Notas para el lector

Cuando los capítulos tienen varias secciones, éstas se enumeran de manera que, por ejemplo, "sección 2.3" significa "sección 3 del capítulo 2". Igualmente, "ecuación (2.3)" significa "ecuación 3 del capítulo 2".

Las palabras ‘clave’ importantes aparecen impresas en letra **negrilla** cuando se utilizan por primera vez. Además, estos términos se han recopilado en el índice al final del libro.

Capítulo 1

El espacio euclídeo

1.1. La distancia

Al comienzo del libro 1, hablamos sobre cómo medir la distancia para ir de casa al colegio contando las zancadas o pasos que necesitamos dar para realizar este recorrido. El paso era la *unidad* de distancia y el número de pasos era la *medida* de esa particular distancia. Lo que queremos hacer ahora es precisar esa idea.

La unidad de distancia *estándar* (o *patrón*) es '1 metro' (o, brevemente, 1 m) y se define sobre una 'barra de medir', cuyas marcas sobre sus extremos fijan el valor de la unidad. Cualquier otro par de marcas (por ejemplo, sobre alguna otra barra o vara) también están a la distancia de 1 m si al ponerlas en contacto con las de la barra estándar coinciden con las de ésta. De esta manera, podemos hacer tantas copias como queramos de la unidad, todas ellas con la misma longitud. En el libro 1, medíamos las distancias poniendo esas copias una a continuación de otra (esta era la 'ley de combinación' para distancias). Si, por ejemplo, disponíamos de tres de estas copias, la distancia entre los extremos de esas barras era de '3 m'. Equivalentemente, también podríamos decir que la 'distancia entre las tres barras es de 3 m' o que la 'longitud del camino desde el comienzo de la primera al final de la última es de 3 m'. Éstas son tres maneras de decir lo mismo.

Ahora, el número de unidades necesarias para conectar un punto 'B' partiendo de un punto 'A' dependerá de cómo dispongamos las barras. Si forman una línea 'sinuosa', como una serpiente, necesitarás más porque el camino será más largo. Sin embargo, la distancia no cambia, ya que es un camino **único** (uno y sólo uno), *el más corto* que lleva a B desde A. Obviamente, la longitud de este camino puede no corresponderse exactamente con un número entero de unidades; no obstante, estableciendo 'mini–unidades' más y más pequeñas (como se hizo en el capítulo 4 del libro 1), la longitud de ese camino puede medirse de forma tan precisa como queramos, representándola mediante un número decimal. Lo importante aquí es que la distancia AB es la longitud del *camino más corto* entre A y B. En la práctica, ésta se puede obtener marcando las unidades (o mini–unidades) sobre una cuerda o cinta en vez de una barra de medir rígida. Cuando se tensa la cinta, ésta puede aportar una medida precisa de la distancia AB. El camino más corto define una **línea recta** entre los puntos A y B.

Una cosa que debemos recordar sobre la medida de distancias (o cualquier otra magnitud, como la masa o el tiempo) es que es siempre un cierto *número de unidades*, pero no el número en sí. La distancia desde casa al colegio puede ser de 2000 m (la unidad es el metro), pero 2000, por sí mismo, es únicamente un número. La magnitud puede expresarse como: magnitud = número × unidad, donde el número es la *medida* de la magnitud en términos de una unidad elegida. Siempre podemos cambiar la unidad. Si una distancia es grande, podemos medirla en kilómetros (km); como 1 km son 1000 m, la distancia (d) desde casa al colegio será d = 2000 m = 2 km. Cuando consideramos una unidad mil veces más grande, el número que mide una cierta magnitud se hará mil veces más pequeño. Así,

$$\begin{aligned} d &= \text{medida antigua} \times \text{unidad antigua} \\ &= \text{medida nueva} \times \text{unidad nueva} \\ &= \frac{\text{medida antigua}}{1000} \times (1000 \times \text{unidad antigua}) \end{aligned}$$

de manera que siempre se mantiene la misma regla. En algunos países la unidad de distancia es la 'milla', habiendo aproximadamente 8 km por cada 5 millas (1 milla = 8/5 km). Así, si quiero expresar una distancia en millas en vez de en kilómetros, tendré: unidad nueva = 8/5 × unidad antigua y medida nueva = 5/8 medida antigua. Teniendo en cuenta esto, la distancia al colegio será (5/8) × 2 millas = 1,25 millas. Al hecho de realizar cálculos con magnitudes se le denomina en ocasiones 'cálculo de magnitudes', aunque no hay nada misterioso en ello, es sólo una cuestión de 'sentido común'.

La **geometría** euclídea (la ciencia del espacio) está basada en los fundamentos establecidos por Euclides, el filósofo griego, que trabajó en ella alrededor del año 300 AC. Esta disciplina está basada en los conceptos de punto y línea recta, pero aún así aporta una buena descripción de las relaciones espaciales que nos encontramos cotidianamente. No obstante, más de 2000 años después, Einstein demostró que cuando nos ocupamos de vastas distancias y los objetos viajan a muy altas velocidades, la geometría euclídea no puede dar buena cuenta de los hechos experimentales. Este fue el nacimiento de la teoría de la **relatividad**. Una de las diferencias fundamentales al ir de Euclides a Einstein es que el camino más corto entre dos puntos ya *no* es necesariamente una 'línea recta'; el espacio se 'curva'. No hay nada extraño en esto. Por ejemplo, un barco no sigue el camino más corto entre dos puntos sobre la superficie de la tierra. La tierra es como un gran globo —la superficie no es plana— y lo que parece ser el camino más corto (de acuerdo con el compás) no es en realidad una línea recta sino una curva. Lo extraño es que el *propio espacio* está muy ligeramente 'combado', especialmente muy cerca de los objetos pesados como el sol y las estrellas. De manera que las ideas de Euclides no son nunca correctas de una forma *perfecta*; son simplemente tan cercanas a la verdad que, en la vida de cada día, podemos aceptarlas sin preocuparnos demasiado.

Prácticamente en todo el libro 2 hablaremos sobre la geometría euclídea. Sin embargo, en vez de hacerlo como lo hizo Euclides (que es también se hace hoy día en muchos colegios en todo el mundo), haremos uso del álgebra (que vimos en el libro 1) desde el comienzo. Así que no seguiremos la historia. Recuerda que los griegos no aceptarían los números irracionales (como se vio en el capítulo 4 del libro 1); ellos no podrían expresar sus ideas sobre el espacio en términos de distancias y, por tanto, habrían tenido que basar enteramente sus argumentos en *representaciones gráficas*, no en números. Éste es el motivo por el que el álgebra y la geometría se desarrollaron de forma independiente durante dos mil años. Mirando a las matemáticas como un todo (no como una materia con muchas ramas, tales como el álgebra, la geometría o la trigonometría), podemos alcanzar nuestro objetivo más fácilmente.

1.2. Fundamentos de geometría euclídea

El hecho de que el espacio en el que vivimos tenga una 'propiedad de distancia' (podemos medir experimentalmente la distancia entre dos puntos cualquiera, A y B, y asignarla un *número*) será nuestro punto de partida. Convertiremos esto en un 'axioma' (un principio básico que tomamos como 'dado'):

> **El axioma de distancia**
>
> El camino más corto entre dos puntos, A y B, es **único** (uno y sólo uno) y se denomina *línea recta*. Su longitud es la *distancia* entre A y B.

Lo primero que tenemos que hacer es hablar sobre las propiedades de las líneas rectas y la forma en que éstas nos proveen de los fundamentos de

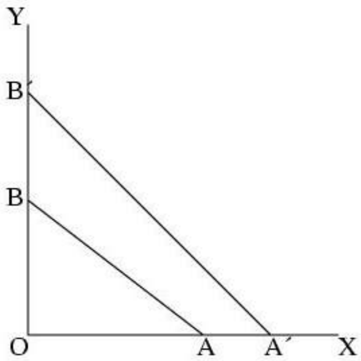


Figura 1

toda la geometría euclídea. De hecho, la geometría euclídea puede levantarse a partir de la siguiente 'construcción', indicada en la Fig. 1, que se puede comprobar experimentalmente y que podemos tomar como segundo axioma:

El axioma sobre la métrica

Dados cualesquiera dos puntos, A y B, podemos encontrar un tercero, que denominamos 'origen O', tal que las distancias OA, OB y AB están relacionados mediante la igualdad

$$AB^2 = OA^2 + OB^2. \tag{1.1}$$

Si las líneas rectas OA y OB se extienden tan lejos como queramos (como en la Fig. 1), la distancia A'B' entre cualesquiera otros dos puntos, A' y B', viene dada también por la misma fórmula, $(A'B')^2 = (OA')^2 + (OB')^2$. (Observar que AB, $A'B'$, etc., denotan magnitudes simples, como longitudes, no productos.)

Siempre que se puede realizar esta construcción, los matemáticos hablan de **espacio euclídeo** y dicen que (1.1) define la 'métrica' de tal espacio ('métrica' significa simplemente que las distancias pueden medirse). Puedes comprobar (1.1) considerando casos particulares. Por ejemplo, tomando OA = 3 cm ('cm' significa 'centímetro', con 100 cm = 1 m) y OB = 4 cm, verás que AB = 5 cm ($3^2 = 9$ y $4^2 = 16$, de manera que la suma de los cuadrados es $9 + 16 = 25 = 5^2$). La misma fórmula es satisfecha por OA = 5 cm, OB = 12 cm y AB = 13 cm ($25 + 144 = 169 = 13^2$). Si tomas OA = 4 cm y OB = 5 cm, deberías obtener AB = 6.403 cm, ya que 6,403 es la raíz cuadrada de 41 (= 16 + 25). Esta construcción nos aporta varias definiciones e ideas nuevas:

- Las líneas OA y OB de la Fig. 1 se dice que son **perpendiculares** o que forman **ángulos rectos**. Las líneas rectas formadas al desplazar A y B con respecto al origen O en cualquier dirección se denominan **ejes**. OX es el eje x y OY es el eje y.

- Los puntos O, A y B definen un **triángulo** 'rectángulo', OAB, cuyos tres lados vienen dados por las líneas rectas OA, OB y AB. 'Tri' significa tres y 'ángulo' se refiere a las líneas OA y OB. El ángulo mide cuánto debemos girar una línea alrededor del origen O para que esta línea se alinee con la otra; veremos más sobre esto posteriormente.

- Todas las líneas rectas que **intersectan** (es decir, cruzan a través de un único punto) ambos ejes, tales como AB o $A'B'$, se dice que 'pertenecen a un **plano**', el cual queda definido por los dos ejes.

A partir del axioma (1.1) y de las definiciones que le siguen se puede construir toda la geometría —la ciencia que necesitamos para realizar mapas, dividir la tierra, diseñar edificios y cualquier otra cosa que esté asociada a las relaciones en el espacio. Euclides comenzó desde axiomas diferentes y argumentaba utilizando dibujos, obteniendo resultados clave, denominados **teoremas**, así como otros resultados que se siguen de éstos, llamados **corolarios**. Euclides demostró cada uno de esos teoremas en un orden lógico, donde cada uno depende de otros demostrados anteriormente, y los publicó en los 13 libros de su famosa obra "Los Elementos", en la que se basa el patrón de enseñanza de la geometría utilizado durante los siglos pasados. A diferencia de éste, aquí hemos utilizado los métodos del álgebra (libro 1), encontrando que esa misma cadena de teoremas puede demostrarse más fácilmente. Por supuesto, no intentaremos desarrollar toda la geometría, sino que únicamente estudiaremos los primeros eslabones de la cadena —encontrando que no necesitamos basar nuestros argumentos en representaciones gráficas, sino que podemos hacerlo por completo mediante los números. Las representaciones gráficas son útiles porque nos recuerdan lo que estamos haciendo. Sin embargo, nuestros argumentos estarán basados en *distancias*, las cuales se miden mediante números.

Esta manera de hacer las cosas se denomina a menudo **geometría analítica**, aunque es mejor no pensar en ello como algo separado del resto; simplemente se trata de una matemática 'unificada' ('hecha de una sola pieza').

Ejercicios

(1) Haz una **cinta de medir** a partir de un trozo de cinta o cuerda (utilizando una regla para marcar los centímetros) y utilízala para medir:

- La distancia (en diagonal) d entre esquinas opuestas de esta página.
- Las longitudes de los dos lados (x e y) de esta página.
- La distancia AB entre dos puntos A y B sobre la superficie curvada de un cubo (como los que se utilizan para recoger agua), manteniendo la cinta bien ajustada y siempre a la misma altura.
- La distancia entre A y B (L) cuando estos puntos están muy cercano el uno del otro y la cinta ha dado una vuelta completa. A una vuelta completa se le denomina **circunferencia** del cubo.
- La distancia entre dos puntos *opuestos* situados sobre el borde inferior del cubo. Esta distancia, que denotamos como D, se denomina **diámetro** del cubo.

(2) En el ejercicio anterior, verifica que la suma de x^2 y y^2 da d^2, como debería ser de acuerdo con (1.1).

(3) En el ejercicio 1, observa que L es varias veces mayor que D. ¿Cuántas veces? Tu respuesta debería ser, *grosso modo*, el número π ("pi"), que a los griegos les dio tantos problemas, como vimos en el libro 1.

(4) En algunos países, las distancias pequeñas se miden en "pulgadas" en vez de en cm. *Grosso modo*, 1 pulgada equivale a 2,5 cm (la longitud de la última falange de tu dedo pulgar). Escribe en pulgadas las distancias que mediste en el ejercicio 1. Demuestra que las respuestas a los ejercicios 2 y 3 permanecen invariables.

(5) Haz una **escuadra** sencilla, es decir, un triángulo como OAB en la Fig. 1, de lados 9 cm, 12 cm y 15 cm, cortado en un trozo de cartón duro. Úsalo para marcar los ejes OX y OY sobre una hoja de papel grande (por ejemplo, una hoja de periódico o papel de embalar). Elige varios pares de puntos, como A y B (ó A' y B') en la Fig. 1, y verifica que las distan distancias AB ($A'B'$) están relacionadas siempre con OA y OB (ó OA' y OB') mediante la ecuación (1.1).

(6) Toma una caja grande rectangular y mide las longitudes (a, b y c) de los tres bordes diferentes, así como la distancia (d) entre esquinas opuestas

(es decir, aquéllas que se encuentra lo más lejanas posible). Demuestra a partir de tus medidas que $d^2 \approx a^2 + b^2 + c^2$, donde el signo $\approx$ significa 'aproximadamente' o 'prácticamente' igual. Utilizar la relación (1.1) para probar que el resultado 'exacto' debería ser

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

(Las medidas no son nunca demasiado perfectas, así que no puedes emplearlas nunca para *demostrar* algo.)

Capítulo 2

El espacio bidimensional

2.1. Líneas rectas paralelas y rectángulos

En la sección 1.2 hemos definido el *plano*: es una región constituida por dos líneas rectas de longitud ilimitada, denominadas ejes, que se cortan (o cruzan) en un punto. Todas las líneas rectas que cortan los dos ejes caen sobre el mismo plano; *cualquier* par de tales rectas que posea un punto en común (que pueda tomarse como 'origen') puede ser utilizado como un sistema de ejes alternativo. El plano es una región **bidimensional** (**espacio de dimensión 2**).

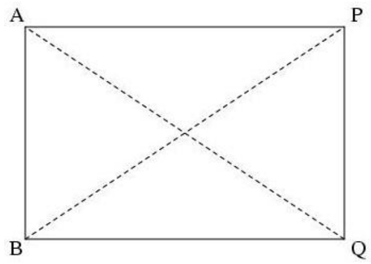


Figura 2

La *perpendicularidad* es una relación especial entre dos líneas rectas que se cortan en un punto, definida en la sección 1.2: dos líneas son perpendiculares cuando forman un ángulo recto. Así, las líneas AB y AP de la Fig. 2 son perpendiculares, con $BP^2 = AB^2 + AP^2$. (Observa que las líneas AQ y BP, denotadas en la figura mediante línea a 'trazos', solamente aparecen como ayuda; son "líneas de construcción".) Ahora introduciremos una nueva definición:

> *Definición.* Si dos líneas rectas de un plano son perpendiculares a una tercera, se dice que aquéllas son **paralelas**.

Observa que en nuestro espacio bidimensional *todas* nuestras líneas rectas caen sobre el mismo plano, así que no siempre podremos afirmar lo que dice la definición.

Partiendo de la definición anterior, podemos introducir el primer teorema:

> *Teorema.* Cualquier línea recta perpendicular a *una* cualquiera de un par de líneas paralelas también es perpendicular

Prueba. (Si ves que esta prueba es difícil, sáltatela; puedes regresar en cualquier momento.) Supongamos que AB y PQ, en la Fig. 2, son paralelas, siendo ambas perpendiculares a AP (como en la *definición*), y que BQ es la *otra* línea recta perpendicular a AB. Debemos demostrar, por tanto, que BQ también es perpendicular a PQ. Simbólicamente, si utilizamos (1.1), esto se traduce en

$$\text{dado } AP^2 + PQ^2 = AQ^2,$$

$$\text{demostrar que } BQ^2 + QP^2 = BP^2 = BA^2 + AP^2.$$

Debemos mostrar que *hay* un punto Q para el cual estas relaciones se satisfacen.

Aunque las longitudes BQ y QP se desconocen (dependen de dónde hayamos situado Q), pero las posibilidades son:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & BQ = AP, & PQ = AB, \\ \text{(b)} & BQ = AP, & PQ \neq AB, \\ \text{(c)} & BQ \neq AP, & PQ = AB, \\ \text{(d)} & BQ \neq AP, & PQ \neq AB. \end{array}$$

Es fácil ver que (b) no es posible, ya que si $BQ = AP$, entonces

$$AQ^2 = AB^2 + BQ^2 = AB^2 + AP^2, \quad \text{mientras que} \quad AQ^2 = AP^2 + PQ^2$$

Las dos expresiones para AQ^2 son únicamente iguales cuando $PQ = AB$, de manera que eliminamos la posibilidad (b). Mediante un argumento similar, descartamos también (c).

Si aceptamos (a), tenemos que $BQ^2 + QP^2 = BP^2$ $(= BA^2 + AP^2)$, que es la condición para que las rectas BQ y QP sean perpendiculares. Por tanto, el teorema es verdadero. No obstante, cuando se fija Q de esta manera, la posibilidad (d) también tiene que ser descartada, ya que en caso contrario significaría que existe *otro* punto de cruce, Q', tal que $BQ' \neq BQ$ y $PQ' \neq PQ$, aunque sabemos que la perpendicular desde B sólo puede cortar a otra recta a través de *un* punto que ya hemos encontrado antes. Así, pues, (a) debe ser cierta, de donde se sigue el teorema: BQ es perpendicular a PQ.

La prueba del teorema introduce otras ideas:

(i) Las 'figuras' planas (o formas), como la 'caja' de la Fig. 2, aparecen cuando dos pares de líneas rectas paralelas se cortan formando un ángulo recto. Estas formas se denominan **rectángulos**, cuyos lados opuestos poseen igual longitud. Cuando *todos* los lados tienen la misma longitud, la forma se denomina **cuadrado**.

(ii) El camino más corto entre un punto y una línea recta es el que va sobre la línea recta que pasa por dicho punto y es perpendicular a la recta en cuestión. Este camino es único.

(iii) El camino más corto entre dos líneas rectas paralelas (sobre un plano), es el que va sobre una línea recta perpendicular a las dos. Todos los caminos que pueden trazarse de este modo entre ambas líneas paralelas poseen la misma longitud. Esto descarta la posibilidad de que ambas líneas se puedan encontrar alguna vez (éste es uno de los primeros axiomas de Euclides), ya que el camino más corto debería tener longitud cero para todo par de puntos y entonces ambas líneas serían coincidentes (es decir, sólo habría una).

2.2. Puntos y líneas rectas en el espacio bidimensional

Llegados a este punto, estamos en condiciones de describir cualquier punto sobre un plano mediante dos números (en concreto, éstos son *distancias*, aunque, como vimos en el capítulo 1 del libro 1, a menudo los denominaremos 'números', de manera que cada distancia se corresponde con un cierto número de unidades). Supongamos que el plano está definido mediante dos ejes, OX y OY, que, como en la Fig. 3, consideramos perpendiculares. Desde cualquier punto P podemos "tirar" dos perpendiculares sobre OX y OY; la posición del punto P queda fijada, así, asignando dos distancias, OQ $(= RP)$ y OR $(= PQ)$ —las igualdades se siguen del hecho de que $ORPQ$ es un rectángulo. Estas dos distancias, que denotamos mediante x e y, respectivamente, se denominan **coordenadas rectangulares** o **cartesianas** de P con respecto a los ejes OX y OY. Por simplicidad, siempre utilizaremos ejes que son perpendiculares; x e y también se denominan **proyecciones** sobre los ejes de la línea OP, que va desde el origen hasta el punto P. Cualquier punto sobre

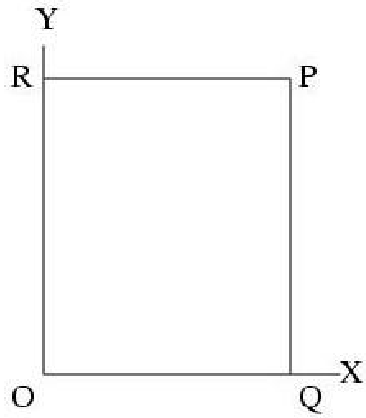


Figura 3

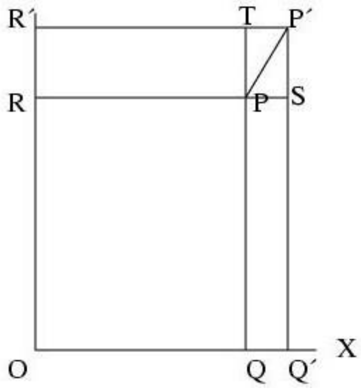


Figura 4

el plano se describe mediante sus coordenadas (x, y). Toda la geometría del plano o *planar* se puede desarrollar *algebraicamente* en términos de los pares de números (x, y) que definen los puntos sobre los que queremos hablar.

Para entender esto, reflexionemos primeramente sobre las líneas rectas. Si P y P' son dos puntos cualquiera del plano, podemos trazar perpendiculares para encontrar sus coordenadas, (x, y) y (x', y'), respectivamente, como en la Fig. 4. Teniendo en cuenta los resultados que hemos visto antes, el segmento que va desde P a P' tiene proyecciones $QQ' = x' - x$ y $RR' = y' - y$ sobre los ejes; además, $QQ' = PS$ y $RR' = PT$. Por tanto, la longitud del segmento PP', es decir, la separación entre P y P', denotada con s, viene dada por

$$s^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2. \tag{2.1}$$

Esta expresión es cierta independientemente de lo lejanos o cercanos que se encuentren P y P'. El punto de partida de la geometría euclídea, enunciado mediante la relación (1.1), se expresa ahora en términos de las coordenadas a través de la relación (2.1). Generalmente, esta relación suele utilizarse en el caso en el que P y P' se encuentran muy cerca el uno del otro, de manera que $x' - x$ e $y' - y$ son diferencias muy pequeñas, que pasamos a denotar como dx y dy, respectivamente, y que denominamos **diferenciales**. Así, pues, para puntos muy cercanos podemos escribir (2.1) como

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \tag{2.2}$$

expresión que se denomina 'forma métrica fundamental'. En el espacio euclídeo, la forma para la 'suma de cuadrados' es cierta independientemente de que la separación entre dos puntos sea grande o pequeña. Sin embargo, si trazas un mapa debes recordar que la superficie de la Tierra es curvada y, por tanto, para distancias pequeñas (por ejemplo, de la escala de tu ciudad) puedes utilizar (2.2), pero no para distancias más grandes (por ejemplo, de la escala de tu país). Estrictamente hablando, (2.2) es cierta sólo 'en el límite' (ver el capítulo 4 del libro 1) en el que las distancias van a cero. El espacio puede ser *localmente* euclídeo. En los últimos cien años nuestra idea del espacio ha cambiado mucho, a pesar de que en la vida diaria podemos emplear la geometría euclídea sin ningún problema.

Ahora podemos preguntarnos sobre cómo se describe una línea recta mediante coordenadas cartesianas rectangulares. Supongamos que tal línea corta al eje y por el punto A, con coordenadas $(0, c)$, y que queda totalmente fijada dando las coordenadas (x_1, y_1) de otro punto B que cae sobre la misma (ver Fig. 5). Los puntos A, B y C definen un triángulo rectángulo cuyos lados AC y BC tienen longitudes tales que $BC/AC = m$. En tal caso, decimos que los lados se encuentra en una *relación* m (independientemente de las unidades que utilicemos para medirlos). En términos de coordenadas, esto significa que $y_1 - c = mx_1$, de donde se sigue que las coordenadas (x, y) de *cualquier* punto D, sobre la misma línea, están relacionadas de un modo similar:

$$y = c + mx. \tag{2.3}$$

Para probar que el nuevo punto D, cuyas coordenadas vienen dadas por (2.3), cae sobre el mismo camino más corto que une A y B, podemos utilizar la fórmula de la longitud (2.1). Así, $AB^2 = (y_1 - c)^2 + mx_1^2 = (1 + m^2)x_1^2$, $AD^2 = (1+m^2)x^2$ y $DB^2 = (1+m^2)(x_1-x)^2$. Tomando las raíces cuadradas de estas cantidades encontramos que

$$AB = \sqrt{1+m^2}\; x_1, \quad AD = \sqrt{1+m^2}\; x \quad \text{y} \quad DB = \sqrt{1+m^2}\; (x_1 - x).$$

De estas relaciones se sigue que $AD + DB = AB$, lo que significa que los dos caminos, AB y ADB (es decir, ir de A á B pasando por D), tienen la misma longitud (la del camino más corto entre A y B). Cuando las coordenadas de cualquier punto D están relacionadas mediante (2.3), el punto cae sobre la línea recta que pasa a través de A y B.

Decimos que (2.3) es la 'ecuación de la línea recta', donde $m = BC/AC$ es la **pendiente** de la recta y $c = OA$ es el **punto de corte con el eje** y. Observar que la ecuación (2.3) describe *cualquier* línea recta sobre el plano OXY y que la prueba que acabamos de dar no depende del punto D *entre* A y B. Por ejemplo, si $x > x_1$, la Fig. 5 mostraría que D cae sobre el tramo de línea que se extiende más allá de B. Siguiente un argumento similar, B debería caer sobre la línea recta AD. No obstante, no es necesario dibujar una

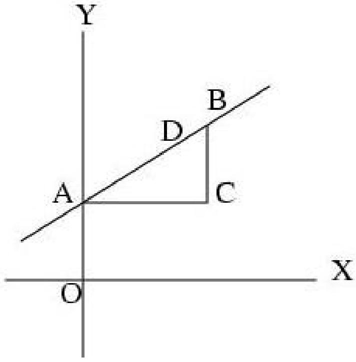


Figura 5

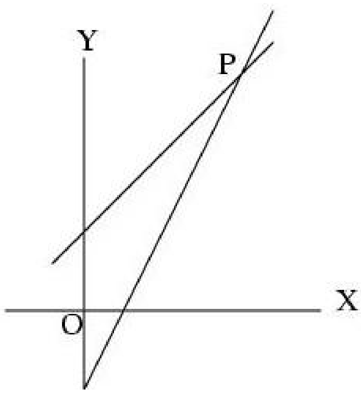


Figura 6

representación diferente para cada caso posible; si x e y se refieren a puntos que están a la izquierda del eje y o debajo del eje x, simplemente tomarán valores negativos. Dado que las propiedades del álgebra son satisfechas por cualquier número, nuestros resultados serán válidos siempre.

Algunas veces dos líneas sobre el plano se cruzan en un punto P, como en la Fig. 6. El que se crucen o no es una cuestión muy importante, la cual constituyó el punto de partida de todo el gran trabajo realizado por Euclides.

2.3. ¿Cuándo y dónde se cruzan dos líneas rectas?

Echemos de nuevo un vistazo al 'axioma de líneas paralelas' de Euclides (dos líneas rectas paralelas *nunca* se cruzan). ¿Qué significa este axioma en términos algebraicos?

Supongamos que las dos líneas vienen descritas por ecuaciones como (2.3), pero con valores diferentes de la pendiente (m) y del punto de corte con el eje y (c), es decir,

$$y = c_1 + m_1 x, \qquad \text{y} = c_2 + m_2 x. \tag{2.4}$$

En la Fig. 6 podemos ver cómo se cruzan dos de tales líneas en el punto P. ¿Cómo podemos determinar este punto? La primera ecuación en (2.4) relaciona las coordenadas x e y del punto sobre la línea 1, mientras que la segunda ecuación hace lo correspondiente sobre la línea 2. En un punto de cruce, los mismos valores deben satisfacer ambas ecuaciones, que pasan a llamarse **ecuaciones simultaneas** (ambas deben satisfacerse al mismo tiempo). Este punto se encuentra fácilmente para cualquier caso dado. Por ejemplo, si $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $c_1 = 1$ y $c_2 = -1$, los valores de x e y deben ser tales que

$$y = 1 + x \quad \text{y} \quad y = -1 + 2x,$$

que se obtienen tras sustituir los valores numéricos anteriores en las dos ecuaciones. Así, pues, en el punto de cruce debe suceder que $1+x = -1+2x$, de donde se obtiene (ver los ejercicios del capítulo 3 en el libro 1) que $x = 2$ e $y = 1 + x = 3$. Este caso se ilustra en la Fig. 6, donde el punto P es $(2, 3)$. Si en vez de estos valores, introducimos $c_2 = 3$ y conservamos el valor de la pendiente ($m_2 = 2$) en la segunda ecuación, el resultado final será $x = -2$ e $y = -1$ (intenta obtener este resultado por ti mismo).

Finalmente, supongamos que las dos líneas rectas tienen la misma pendiente, $m_1 = m_2 = m$. En tal caso, el valor de (x, y) en el punto de cruce debe ser tal que

$$y = c_1 + mx = c_2 + mx,$$

que sólo se satisface si $c_1 = c_2$ independientemente del valor común de la pendiente. Esto significa que las dos líneas serán la misma (misma pendiente y mismo punto de corte con el eje y); este tipo de líneas se denomina *coincidentes*. *Todos* los puntos sobre cualquiera de estas líneas serán *puntos de cruce*. En tanto $m_1 \neq m_2$,siempre podemos encontrar un único punto de cruce para $c_1 \neq c_2$. Sin embargo, a medida que los valores de m_1 y m_2 se aproximan, la distancia de los puntos de cruce se aleja cada vez más. Este 'punto 3' no puede mostrarse en la Fig. 6, ya que es un 'punto en el infinito'.

Este ejemplo tan simple es muy importante, pues muestra cómo un acercamiento algebraico a la geometría, basado en la idea de *distancia* y en la métrica (1.1), puede conducir a soluciones generales de problemas geométricos sin necesidad de realizar representaciones gráficas de todas las situaciones posibles. Además, muestra que el famoso axioma de Euclides, el que dice que las líneas paralelas nunca se cruzan, se desprende como primer resultado.

Antes de continuar, echemos un vistazo a otra forma simple en el espacio bidimensional, el **círculo**, que los antiguos consideraron como la más perfecta de todas las formas. Dibujar un círculo perfecto es bastante fácil: clava un clavo en el suelo y camina alrededor del mismo con algún tipo de marcador atado al clavo mediante un trozo de cuerda tensa. El marcador trazará un círculo. Ahora, ¿cómo puedes describirlo algebraicamente? Consideremos que el clavo está situado en el origen O y el marcador en un punto P, con coordenadas (x, y). Si la cuerda tiene longitud l y la mantienes tensa, sabes que la distancia OP (el tercer lado de un triángulo rectángulo, cuyos otros lados tienen longitudes x e y) siempre se mantiene igual (l). Mediante la métrica de la suma de cuadrados esto significa que

$$x^2 + y^2 = l^2 = \text{constante}, \tag{2.5}$$

a pesar de que tanto x como y pueden cambiar. Decimos que ésta es la "ecuación de un círculo" con centro en el origen O, de igual forma que decíamos que (2.4) era la ecuación de una línea recta, caracterizada por una determinada pendiente (m) y el cruce con el eje y en un cierto punto ($y = c$). La ecuación del círculo es de 'segundo orden' (x e y están elevados al cuadrado), a diferencia de la ecuación de la línea recta, que es de 'primer orden' o *lineal.* En los ejercicios y en otros capítulos encontrarás muchos más ejemplos.

Ejercicios

(1) Considera que las esquinas del rectángulo de la Fig. 3 están en los puntos O $(0,0)$, Q $(3,0)$, P $(3,4)$ y R $(0,4)$, y dibuja la línea recta $y = \frac{1}{2}x$. ¿En qué punto esta línea cruza el lado OP? (Cualquier punto sobre QP debe tener $x = 3$, por lo que sólo necesitas elegir y.)

(2) ¿Qué sucede si cambias la línea que pasa a través del origen en el ejercicio anterior por $y = 2x$? (El punto que encontraste en el ejercicio 1 cae *entre* Q y P; se dice que es un punto *interno*. El nuevo punto caerá sobre el segmento QP *extendido* (más allá del punto P); se dice que es un punto *externo*, ya que que cae *fuera* del segmento QP.)

(3) Repite los ejercicios 1 y 2 utilizando las líneas:

$$y = 3 - \tfrac{1}{2}x, \qquad y = 3 - 2x, \qquad y = -3 + \tfrac{1}{2}x, \qquad y = -3 + 2x,$$

y describe tus resultados.

(4) En vez de utilizar la ecuación (2.3), considera $y = 2 + \frac{1}{2}x^2$ y dibuja la curva y frente a x. Esta nueva ecuación describe una **parábola**. Encuentra los valores de x e y que se ajustan a la ecuación utilizando los valores $x = -3$, -2, -1, 0, $+1$, $+2$ y $+3$, y represéntalos (marca los puntos en la figura y únelos mediante una línea curva).

Encuentra los puntos donde las líneas rectas del ejercicio 3 cruzan la parábola (necesitarás tener en cuenta el modo en que se resolvía una *ecuación cuadrática*; ver sección 5.3 del libro 1) y muestra tus resultados en una figura.

Nota. En todos los ejercicios, x, y, etc., equivalen a *distancias* en las figuras. Por tanto, cada uno representa un cierto número de *unidades*. Sin embargo, como el tamaño de la unidad no importa, ésta no necesita mostrarse.

Capítulo 3

Áreas y ángulos

3.1. ¿Qué es el área?

En la sección 2.1 hemos hablado sobre los rectángulos, que hemos vuelto a utilizar en la sección 2.2 al establecer las coordenadas rectangulares (x, y) de un punto sobre el plano. Una cosa que sabemos sobre los rectángulos es que tienen un **área**. Por ejemplo, si utilizamos baldosas para cubrir la forma de un rectángulo, como en la Fig. 7, queremos saber cuántas necesitaremos; ese número mide el área. Si nuestras baldosas son cuadrados de 20 cm de lado y estamos cubriendo un suelo de 3 m en una dirección (la dirección x, por ejemplo) y 2 m en la otra dirección (la dirección y), necesitaremos 3×5 baldosas en cada fila, y como hay 2×5 filas, el número total de baldosas será 15×10. Por tanto, el área del suelo será de 150 unidades, siendo la unidad '1 baldosa'.

Si las longitudes de los dos lados son L_1 m y L_2 m, necesitaremos $L_1 \times L_2 \times 25$ baldosas, donde L_1 y L_2 son números que *miden* ambos longitudes en

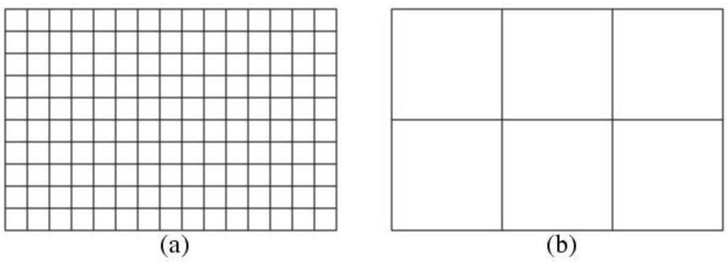


Figura 7

metros. Si estuviésemos utilizando baldosas más grandes, siendo cada una un cuadrado con lados de 1 m de longitud, entonces una baldosa cubriría exactamente el mismo área que 25 baldosas de las anteriores. La equivalencia entre el área que cubre una baldosa grande y 25 de las pequeñas puede escribirse mediante la ecuación:

$$1 \text{ baldosa grande} = 25 \text{ baldosas pequeñas},$$

ó

$$1 \text{ unidad nueva} = 25 \text{ unidades antiguas}.$$

Ahora sabemos, por lo que estudiamos en la sección 1.1, que la medida de una magnitud depende de la unidad que estamos empleando. Si tomamos una nueva unidad k veces mayor que la anterior, el número que mide la magnitud será k veces más pequeño. De este modo, en el ejemplo anterior, el área del suelo será $A = 150$ baldosas pequeñas $= (150/25)$ baldosas grandes, las 6 baldosas grandes que corresponden al área en 'metros cuadrados' del rectángulo de 3 m $\times$ 2 m. Como se ve en la Fig. 7(b), las 6 baldosas grandes se ajustan perfectamente al rectángulo.

Con el metro como unidad de longitud estándar, vemos que la unidad de *área* es 1 m^2. Si la unidad de *longitud* se multiplica por k, la medida de la longitud de un objeto tendrá que dividirse por k. Conforme a esto, la unidad de *área* se multiplica por k^2 y la correspondiente medida de un área se divide por k^2. En general, decimos que el área tiene "**dimensines** de longitud al cuadrado"; simbólicamente, [área] $= L^2$ (se lee "el área tiene dimensiones de longitud al cuadrado"). Cuando utilizamos símbolos para representar *magnitudes* debemos tener cuidado siempre con expresar correctamente las unidades tan pronto como aportemos el número que miden dichas magnitudes.

El rectángulo es una 'forma' particular con ciertas propiedades, como su área o la longitud de uno de sus lados. Si lo desplazamos de una posición a otra en el espacio, esas propiedades no cambian, pues son propias de dicho objeto. Una cosa importante sobre el axioma de métrica (2.2) es que significa que todas las distancias permanecen invariables o **invariantes** cuando un objeto se desplaza sin doblarlo o cortarlo; esta operación se denomina **transformación**. A partir de esta propiedad podemos encontrar el área de otras formas. En particular, hay dos formas especialmente importantes: el triángulo $\triangle$), que tiene sólo tres lados, y el círculo ($\bigcirc$), que tiene un lado continuo (denominado **perímetro**) a una distancia fija de su centro. En el caso del círculo también puede decirse que posee infinitos lados, todos ellos iguales y a la misma distancia del centro de dicha forma.

El área de un triángulo se obtiene fácilmente a partir de la de un rectángulo, ya que éste puede dividirse en dos mitades iguales a través de su diagonal

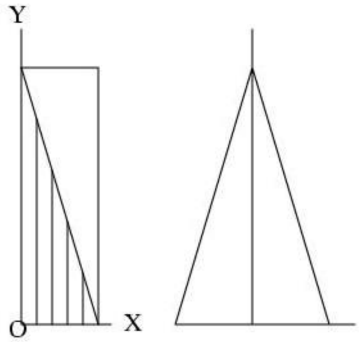


Figura 8

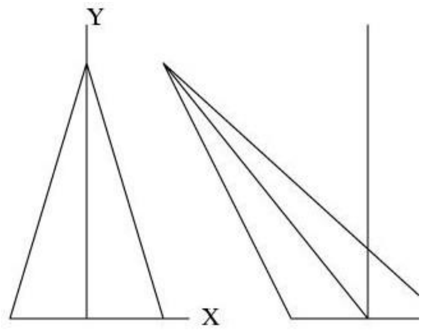


Figura 9

(como en la Fig. 8); cada una de estas dos mitades puede transformarse en la otra sin cambiar de forma. Para ver esto, considera que el eje y actúa de 'bisagra' y gira (como una puerta) el área sombreada del rectángulo, de tal manera que ambas mitades se junten. Entonces, desliza ambas mitades hasta que formen un 'triángulo isósceles', es decir, con dos lados iguales (si repitieses la operación con un cuadrado, obtendrías un 'triángulo equilátero', con todos sus lados iguales). La base del triángulo es dos veces la del rectángulo y su altura es la misma que la de éste último. Así, pues, el área de ambas figuras será la misma. En el caso del triángulo, ésta se obtiene mediante una fórmula sencilla:

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}(\text{base del triángulo}) \times (\text{altura del triángulo}). \quad (3.1)$$

Este resultado se mantiene válido incluso cuando desplazamos la punta superior o **vértice** del triángulo hacia un lado como en la Fig. 9. Esto no puede ser de otro modo, ya que si imaginas que el triángulo está relleno con un cierto número de cuadraditos pequeños (elementos de área) y, entonces, desplazas su vértice, el número total de esos cuadraditos no cambia. Por tanto, los dos triángulos representados en la Fig. 9 han de tener la misma área, que viene dada por (3.1).

El área de un círculo no es tan fácil de determinar como la del triángulo. No obstante, el problema fue resuelto por Arquímedes (otro de los antiguos filósofos griegos), quien utilizó un método muy astuto. Se dio cuenta de que un círculo podía rellenarse, de forma aproximada, colocando en su interior una figura de N lados, denominada **polígono** (como en la Fig. 10, donde $N = 4$), donde cada lado constituye la base de un triángulo con su vértice en el centro del círculo. Haciendo N cada vez más grande, Arquímedes encontró polígonos cuyas áreas se acercaban cada vez más al área del círculo.

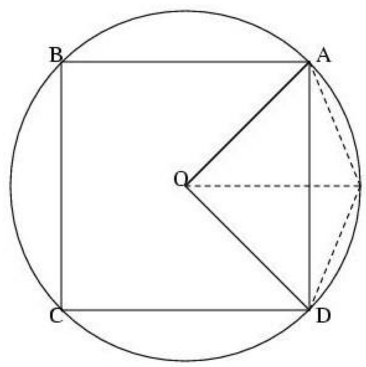


Figura 10

Para un círculo de radio unidad, $r = 1$, la primera aproximación fue el área del cuadrado, donde $A_4 = 4 \times (\frac{1}{2}\, r^2) = 2$, como se infiere de la Fig. 10. Arquímedes fue capaz de probar que un polígono con $2N$ lados (en vez de N) tenía un área A_{2N} dada por la fórmula

$$A_{2N} = \frac{N}{2}\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{2A_N}{N}\right)^2}}. \tag{3.2}$$

donde A_N es el área del polígono de N lados. Utilizando esta fórmula (y dado que $\sqrt{2} \approx 1{,}414214$), puedes obtener fácilmente el área A_8 de un polígono de ocho lados (representado en parte por las líneas a trazos en la Fig. 10) en términos de A_4:

$$A_8 = 2\sqrt{2 - 2\sqrt{(1 - 1^2}} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}828427.$$

Compara este valor con el que se obtiene en la primera aproximación, $A_4 = 2$. Si continuas (necesitarás una calculadora), verás que $A_{16} \approx 3{,}061468$. Y si vas más allá, encontrarás algo muy cercano a 3.141593. Ésta es una buena aproximación al número que siempre se denota mediante la letra griega π ('pi'), que es el **límite** de una serie (ver la sección 5.1 del libro 1): el área de un círculo de radio $r = 1$. Si quieres obtener el área de un círculo de radio r diferente de 1, es suficiente con que recuerdes que [A] $= L^2$ (cuando una longitud se multiplica por r, el área se multiplicará por r^2). De aquí se deriva la fórmula

$$\text{Área del un círculo de radio } r = \pi r^2 \qquad (\pi \approx 3{,}141593), \tag{3.3}$$

que necesitaremos a continuación cuando definamos lo que es un **ángulo**.

3.2. ¿Cómo se mide un ángulo?

¿Cómo podemos medir el 'ángulo' entre dos rectas que se cruzan cuando no son ni perpendiculares ni paralelas? (Es decir, cuando simplemente 'apuntan en direcciones diferentes'.) Tal número viene dado por la *pendiente* m de una recta, ya que ésta fija la dirección de la línea AB en la Fig. 5 con respecto a AC, que es paralela al eje x. Decimos que AB 'forma un ángulo' con AC, siendo m $(= BC/AC)$ la **tangente** del ángulo. Este índice o razón entre cualquier par de rectas se obtiene fácilmente trazando una perpendicular que las una, independientemente de que de cual de ellas tomemos primero. Hay otras dos razones, BC/AB y AC/AB, que también suministran una medida aritmética sencilla del mismo ángulo. Se denominan, respectivamente, **seno** y **coseno** del ángulo. No obstante, hay un número que da una medida más conveniente del ángulo, la 'medida circular', que está directamente relacionado con el círculo. Para obtenerlo, debemos pensar en la *combinación* de ángulos.

Al igual que dos *puntos* definen un *desplazamiento lineal*, dos *líneas rectas* con un punto en común definen un *desplazamiento angular* o *rotación*. El ángulo de rotación posee un *signo*, positivo (para ángulos que se miden en sentido anti-horario) o negativo (en sentido horario), ya que las rotaciones en sentidos contrarios claramente son diferentes. Cuando los *puntos* inicial y final de dos desplazamientos lineales coinciden, se dice que ambos desplazamientos son iguales. Del mismo modo, si las *líneas* 'inicial' y 'final' que definen dos desplazamientos angulares coinciden, decimos que ambos son iguales. Por último, igual que podemos combinar dos desplazamientos lineales poniendo el comienzo de uno sobre el extremo del otro, también podemos combinar dos desplazamientos angulares haciendo coincidir la línea final de uno con la inicial del otro. Estas ideas son más fáciles de entender mirando a la Fig. 11. Los ángulos se nombran asignando tres letras: la primera etiqueta el punto final de la línea inicial, la tercera al punto final de la línea final (la que se origina tras la rotación) y la segunda al punto que permanece fijo (sobre el que se lleva a cabo la rotación). La suma de los ángulos XOP y XOQ da lugar al ángulo XOP', que se obtiene tomando OP como la línea inicial o de partida para el segundo ángulo, POP', que ha de ser igual a XOQ.

Después de explicar lo que queremos decir por 'combinación' e 'igualdad' de ángulos, buscamos una 'identidad' (en el álgebra de rotaciones) y el 'inverso' de un ángulo, ideas que son viejos amigos hechos en el libro 1. Ahora, la 'identidad' es "no hacer absolutamente nada (es decir, rotar la línea inicial un ángulo cero)", y el 'inverso' de un ángulo se obtiene simplemente cambiando el *sentido* de la rotación —una rotación en sentido horario seguida de otra

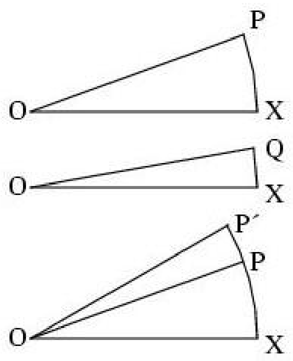


Figura 11

de la misma magnitud en sentido anti-horario equivale a no rotar el sistema. Si denotamos una rotación positiva mediante R y su inversa mediante R^{-1} (rotación negativa), la afirmación anterior significa que

$$\mathsf{R}\mathsf{R}^{-1} = \mathsf{R}^{-1}\mathsf{R} = \mathsf{I}.$$

Lo próximo que debemos hacer es acordar un criterio para *medir* ángulos. Hay un método 'práctico' que se basa en el hecho de que una rotación completa de la línea OP alrededor del punto O (a la cual nos referimos como 1 'vuelta') equivale a no hacer nada. El 'grado sexagesimal' (a partir de ahora acortaremos y diremos simplemente 'grado') es un ángulo pequeño, tal que 360 grados equivalen a 1 vuelta; el ángulo entre dos líneas sobre un plano puede medirse, por tanto, mediante un número (de grados) entre 0 y 360. Así, a diferencia de las distancias (que pueden ser tan grandes como queramos), los ángulos están *acotados*. Esto no significa que el *desplazamiento* angular está acotado. Como sabemos, al atornillar un tornillo, por ejemplo, cada vuelta (rotación de 360 grados) es importante; esta operación puede realizarse una y otra vez para obtener ángulos de rotación cada vez mayores. Por tanto, lo que está acotado es únicamente el ángulo entre dos líneas. En el caso del tornillo la rotación tiene un efecto *hacia afuera* con respecto al plano; en tal caso hablar de ángulos de rotación mayores de 360 grados resulta útil.

Una manera más fundamental de medir ángulos se deriva de la ecuación (3.3) para el área de un círculo. Si usamos θ para denotar el ángulo XOP en la Fig. 11 (los ángulos se denotan generalmente utilizando letras del alfabeto griego; θ se pronuncia 'teta' o 'zeta'), la 'medida circular' del θ viene dada por la relación entre dos longitudes: $\theta =$ arco/radio, donde el 'arco' es la longitud de la parte del círculo entre el punto P y el eje X. Esta magnitud es un número puro, que no depende de la unidad de longitud, y se aproxima tanto como queramos a $\tan\theta$ a $\sin\theta$ a medida que el ángulo se hace más pequeño. Para determinar este número, expresamos (3.3) de otra manera. El área del círculo completo (A) es la suma de las áreas de un número muy grande de triángulos muy pequeños, cada uno con un área $a \approx \frac{1}{2}$ arco $\times$ radio, de manera que $A = \frac{1}{2}$(arco completo) $\times$ radio, donde el término 'arco completo' se refiere a la suma de todos los arcos pequeños (uno por cada triángulo) según avanzamos a lo largo del perímetro del círculo completo. La longitud de este arco es la **circunferencia** del círculo. Así, lo que hemos demostrado es que $A = \frac{1}{2}$(circunferencia $\times$ radio. Esto junto con (3.3) nos da el resultado final

$$\text{circunferencia del círculo} = 2 \times \text{Área} \div \text{radio} = 2\pi r. \tag{3.4}$$

Como la circunferencia es el 'arco completo', $\Theta \times r$ (donde Θ denota el ángulo que resulta de trazar un círculo completo), podemos escribir $\Theta = 2\pi$ radianes. El **radián** es la 'unidad natural' de los ángulos. En términos de 'grados', 2π radianes = 360 grados. Por tanto, a partir de (3.3) se sigue que

$$1 \text{ radián} \approx 57{,}3 \text{ grados.} \tag{3.5}$$

A pesar de su equivalencia, normalmente es mejor utilizar el radián como medida angular. Por ejemplo, dos líneas son perpendiculares cuando el ángulo entre ellas es $\pi/2$, que no depende de la definición de 'grado sexagesimal'.

3.3. Más sobre Euclides

La mayor parte del trabajo de Euclides estuvo relacionado con figuras planas (formas como los triángulos o los rectángulos, los cuales caen sobre un plano). Hay tanto sobre esta materia que podría completar un libro entero. Así que aquí sólo daremos únicamente una ó dos definiciones, así como los resultados claves para comprender estos trabajos:

- Dos ángulos, como A y B en la Fig. 12(a), cuya suma es π, se denominan *complementarios* (cada uno *complementa* al otro y juntos completan el ángulo π). Cuando los ángulos describen rotaciones de la flecha alrededor del punto fijo O, la rotación A seguida de B equivale a la rotación $A+B = \pi$, que voltea la flecha y la hace señalar en el sentido contrario.

- Cuando se cruzan dos líneas rectas, como en la Fig. 12(b), dan lugar a dos pares de ángulos complementarios (A, B) y (A', B'). Si giramos media vuelta la figura completa alrededor del punto de cruce, A y B pasan

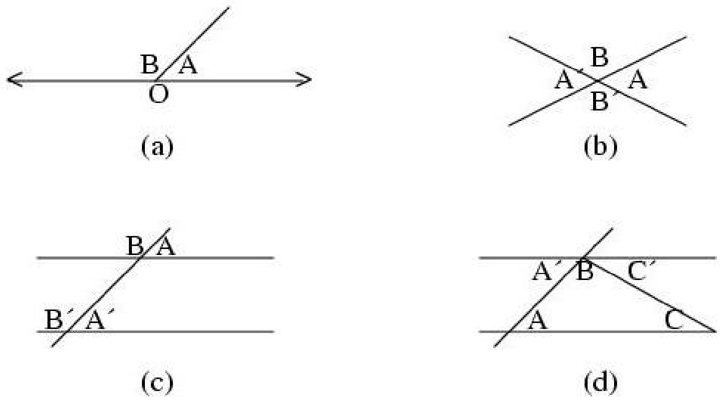


Figura 12

a ser A' y B', respectivamente. Sin embargo, el ángulo A permanece *invariable* bajo esta operación, es decir, $A = A'$ y, de igual modo, $B = B'$ (*los ángulos opuestos son iguales*). Resumiendo, cuando dos líneas se cruzan originan dos pares de ángulos iguales, siendo los ángulos de cada uno de esos pares (por ejemplo, A y B) *complementarios*.

- Cuando una línea recta cruza *dos líneas paralelas*, como en la Fig. 12(c), se producen dos pares de ángulos iguales, $A' = A$ y $B' = B$. Deslizar la figura de manera que enviamos A á A' y B a B' es otro tipo de transformación (ver sección 3.1) que no cambia los ángulos. Tales pares de ángulos se denominan 'alternos'.

- Añadiendo otra línea recta a la última figura [Fig. 12(c)], creamos un triángulo [Fig. 12(d)] con tres *ángulos 'internos'*, A, B y C. Ahora, a partir de los dos últimos resultados, A' (que es opuesto al ángulo alterno á A) es igual á A y, del mismo modo, $C' = C$. Además, la suma de $A'(= A)$, B y $C'(= C)$ es el ángulo π de la Fig. 12(a). De este resultado se sigue que *la suma de los ángulos interiores de un triángulo es π radianes* (es decir, 180 grados ó dos ángulos rectos).

Euclides y su escuela demostraron una gran cantidad de resultados de este tipo, cada uno derivado de aquellos que ya habían sido obtenidos previamente. Todos estos teoremas se enumeraron y coleccionaron, y aún hoy pueden encontrarse en cualquier libro de texto sobre geometría.

Ejercicios

(1) Mira las Figs. 9 y 10, y calcula el área del polígono de ocho lados (octógono u octágono), parte del cual se muestra mediante línea a trazos en la Fig. 10. Verifica que tus resultados concuerdan con la ecuación (3.2) cuando consideras el caso $N = 4$.

El polígono contiene $2N$ triángulos, todos ellos con la misma área. Halla la base y la altura de cada uno de ellos considerando que el círculo tiene radio unidad.

(2) Expresa todos los ángulos de la Fig. 10 tanto en grados sexagesimales como en radianes.

Nota. El próximo capítulo contiene conceptos complicados normalmente estudiados a nivel universitario, pero también bastantes otros que podrás comprender. Echa un vistazo preliminar para ver cuántas ideas diferentes aparecen juntas y después vuelve a leerlo con más detenimiento cuando poseas un conocimiento suficiente.

Capítulo 4

Las rotaciones

Una de las grandezas de las matemáticas es que contiene muchos 'trozos y trocitos', los cuales puede juntarse como ladrillos para construir nuevas ideas y teorías. Estos pequeños trozos son tan útiles que, una vez comprendidos, nunca se olvidan. Para hablar de ángulos y rotaciones necesitamos usar vectores (ver sección 3.2 del libro 1), las propiedades de índices (ver sección 4.2 del libro 1), las series exponenciales (ver sección 5.1 del libro 1), los números complejos (ver sección 5.2 del libro 1) y la idea de rotación como **operador** (ver sección 6.1 del libro 1).

Comencemos con un **vector** apuntando a un punto P desde el origen O, como en la Fig. 13. En una rotación alrededor de O, tal vector gira cierto ángulo θ. Al igual que en la sección 6.1 del libro 1, podemos considerar esta operación como el resultado de aplicar un **operador** de rotación R_θ. Hay una **propiedad de combinación** para tales operadores:

$$\mathsf{R}_{\theta'}\mathsf{R}_\theta = \mathsf{R}_{\theta+\theta'},$$

(no olvides que en la sección 6.1 del libro 1 acordamos que el operador más a la derecha actúa primero) y para cada operador R_θ hay un operador **inverso**, R_θ^{-1}, con la propiedad

$$\mathsf{R}_\theta\mathsf{R}_{-\theta} = \mathsf{R}_{-\theta}\mathsf{R}_\theta = \mathsf{I},$$

donde I es el operador **identidad** (una rotación con ángulo cero). Estas propiedades definen un **grupo** (ver sección 6.1 del libro 1) con un número infinito de elementos, ya que θ puede tomar cualquier valor entre 0 y 2π (rotaciones de ángulos $\theta + 2\pi$ no se consideran diferentes R_θ). A continuación expresaremos todo esto mediante símbolos.

En el espacio bidimensional cualquier punto P viene determinado por sus coordenadas (x, y); para alcanzarlo, comenzando desde el origen (donde $x = 0$

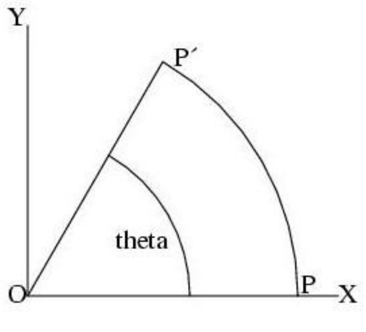


Figura 13

e $y = 0$), avanzas x pasos en la dirección X (es decir, paralelamente al eje X) e y pasos en la dirección Y. En la sección 3.2 del libro 1 sólo había un eje y e se utilizaba para denotar 1 paso a lo largo de ese eje. Ahora hay *dos* tipos de pasos, e_1 y e_2, así que expresamos el vector que describe el desplazamiento desde O hasta P como

$$\mathsf{r} = x\mathsf{e}_1 + y\mathsf{e}_2, \tag{4.1}$$

donde e_1 y e_2 están dirigidos a lo largo de cada una de las dos direcciones; r se denomina 'vector posición' de P. A partir de la sección 3.2 del libro 1, está claro que el orden en el que se den los pasos no importa: si $x = 2$ e $y = 3$, $\mathsf{r} = \mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_2 + \mathsf{e}_2 + \mathsf{e}_2$, pero también $\mathsf{r} = \mathsf{e}_2 + \mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_2 + \mathsf{e}_2 + \mathsf{e}_1$ —de ambas maneras llegas al mismo punto. La distancia desde O a P es la *longitud* de OP o, equivalentemente, del vector r. Respecto a las coordenadas x e y, éstas pueden ser números enteros o fracciones, positivos o negativos, e incluso irracionales, como vimos en la sección 4.2 del libro 1.

Ahora consideremos que *rotamos* un vector, girándolo un cierto ángulo. Una rotación de OP (Fig. 13) un ángulo θ alrededor del origen puede describirse simbólicamente como

$$\mathsf{r} \to \mathsf{r}' = \mathsf{R}_\theta \mathsf{r}, \tag{4.2}$$

donde $\to$ significa "va a" o "tiende a" y r' es el vector posición del punto P' una vez que OP ha sido enviado a OP'. El 'producto' de dos rotaciones, R_1 seguida de R_2 con ángulos θ_1 y θ_2, respectivamente, se expresa como

$$\mathsf{r} \to \mathsf{r}' = \mathsf{R}_2\mathsf{R}_1\mathsf{r} = \mathsf{R}_3\mathsf{r} \quad (\theta_3 = \theta_1 + \theta_2). \tag{4.3}$$

El hecho de que el producto de dos rotaciones se obtenga *sumando* sus *ángulos* de rotación nos recuerda la propiedad de índices, $a^m \times a^n = a^{m+n}$, un resultado que es cierto incluso si los índices m y n no son números enteros. Tratemos de encontrar ahora una conexión entre ambos casos.

En la sección 5.1 del libro 1 nos encontramos con un número que se definía como el **límite** de una **serie**,

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = f(x), \tag{4.4}$$

cuando el número de términos de esta serie se hacía infinito (recuerda que, según la notación abreviada utilizada en el libro 1, $2! = 1 \times 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3$, etc., denominándose $n!$ el "factorial de n"). Este número depende del valor que asignamos a x y aquí se denota mediante $f(x)$ (que se lee "función de x" o, abreviadamente, "efe de equis"), dando a entender que para cada valor de x podemos encontrar un valor relacionado y. Así, x se denomina "variable independiente" (podemos asignarle el valor que queramos) e y es la "variable dependiente", cuyo valor depende del de x. La rama de las matemáticas que se ocupa de las funciones se denomina Análisis (Matemático). En otros libros veremos más sobre este tema, pero aquí es suficiente considerar que una función es un tipo de *regla* —en el caso anterior, la serie (4.4)— mediante el cual podemos obtener el valor de y a partir del valor de x.

La función definida por (4.4) tiene propiedades sorprendentes. Multipliquemos dos de estas series utilizando dos valores diferentes de x (por ejemplo, $x = p$ para una serie y $x = q$ para la otra). Obtendremos

$$\begin{aligned} f(p)f(q) &= \left(1 + p + \frac{p^2}{2!} + \ldots\right)\left(1 + q + \frac{q^2}{2!} + \ldots\right) \\ &= 1 + (p+q) + \left(\frac{p^2}{2!} + pq + \frac{q^2}{2!}\right) + \ldots \\ &= 1 + (p+q) + \frac{(p+q)^2}{2!} + \ldots, \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde sólo se han incluido términos hasta 'segundo orden' (es decir, aquellos que no contienen más de *dos* variables multiplicadas juntas). El resultado se parece mucho a la función (4.4), pero con la nueva variable $x = p + q$. Si continúas, juntando productos del mismo orden, encontrarás que los siguientes términos son

$$\frac{(p+q)^3}{3!} = \frac{(p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3}{3!} \qquad \text{(tercer orden)}$$

y

$$\frac{(p+q)^4}{4!} = \frac{p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4}{4!} \qquad \text{(cuarto orden).}$$

Como puedes intuir, si tomas más términos obtendrás el resultado

$$f(p)f(q) = 1 + (p+q) + \frac{(p+q)^2}{2!} + \frac{(p+q)^3}{3!} + \ldots = f(p+q). \tag{4.6}$$

Obtener una *prueba* de este resultado es más difícil. Primero tienes que mirar todas las formas posibles de obtener productos de n-ésimo orden (n factores juntos) y después debes demostrar que lo que conseguiste puede simplificarse y escribirse de la forma $(p+q)^n/n!$. Por tanto, aceptaremos (4.6) como la propiedad básica de una **función exponencial**, definida en (4.4) y escrita a menudo como "$\exp x$".

A partir de (4.6), asumiendo $q = q = x$, encontramos que $f(x)^2 = f(2x)$. Del mismo modo, encontramos que $f(x)^3 = f(x) \times f(2x) = f(3x)$. De hecho,

$$f(x)^n = f(nx). \tag{4.7}$$

Esta segunda propiedad básica nos permite *definir* la n-ésima potencia de un número incluso cuando n *no es un entero*; sólo depende de la serie (2.14) y se cumple para cualquier n, aunque éste sea irracional o complejo. Más sorprendente aún es que ambas, (4.6) y (4.7), se cumplen con independencia de los símbolos que se consideren (x, p, q, etc.), siempre y cuando estos satisfagan las propiedades de combinación que conocemos, incluyendo $qp = pq$ [de manera que los productos puedan redistribuirse, como cuando se obtuvo el resultado (4.6)].

En la sección 1.7 del libro 1, el número (irracional) obtenido a partir de (4.4) cuando $x = 1$ se denotó e:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots = 2{,}718281828\ldots, \tag{4.8}$$

que nos ofrece una *base* 'natural' para definir todos los números reales. Teniendo en cuenta (4.7), vemos que $e^n = f(n)$ para cualquier n —no sólo para los números enteros, sino también para *cualquier* número en general. Así, reemplazando n por x, obtenemos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \tag{4.9}$$

y las 'propiedades de índices' se puede expresar ahora de una forma general como

$$e^x e^y = e^{x+y}, \qquad (e^x)^y = e^{xy}. \tag{4.10}$$

Ahora estamos en condiciones de regresar de nuevo a las rotaciones. Sabemos que las rotaciones se combinan de acuerdo con (4.3) y que cada rotación R_θ viene etiquetada por su ángulo de rotación θ, que es simplemente un número. Para algunos valores especiales de θ, también sabemos que R_θ es un vector en el espacio bidimensional. Por ejemplo, $\mathsf{R}_{2\pi}\mathsf{r} = \mathsf{r}$, sin embargo $\mathsf{R}_\pi\mathsf{r} = -\mathsf{r}$, ya que rotar un vector *media* vuelta lo hace apuntar en el sentido opuesto, lo

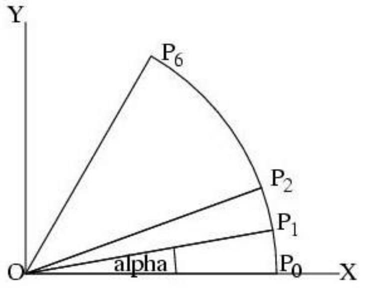


Figura 14

cual significa asociarle un signo negativo. Ahora, ¿cómo podemos describir una rotación general?

Cualquier rotación puede realizarse a través de pasos pequeños —por ejemplo, en pasos de 1 grado. Así, pensemos R_θ como el resultado de llevar a cabo n rotaciones idénticas un ángulo α muy pequeño, es decir, $\theta = n\alpha$ y $\mathsf{R}_\theta = (\mathsf{R}_\alpha)^n$, donde utilizamos la notación de 'potencias' para referirnos al producto $\mathsf{R}_\alpha \mathsf{R}_\alpha \cdots \mathsf{R}_\alpha$ con n factores. De esta manera, n puede identificarse con una medida del ángulo de rotación θ en unidades de α. Si a R_θ le sigue otra rotación $\mathsf{R}_{\theta'}$ con $\theta' = m\alpha$, el resultado será una nueva rotación con ángulo $(m+n)\alpha$. La Fig. 14 representa gráficamente las rotaciones que llevan el vector de posición de un punto P_0 sobre el eje X a P_1 (paso 1), a P_2 (paso 2), etc., siendo el ángulo de rotación en cada uno de estos pasos muy pequeño (aquí aparece agrandado para que pueda verse mejor).

La rotación R_α envía el punto P_0, con vector posición $\mathsf{r} = r\mathsf{e}_1 + 0\mathsf{e}_2$ (cuyas componentes son $x = r$ e $y = 0$ ya que r apunta a lo largo del eje X), a P_1, con $\mathsf{r}' = \mathsf{R}_\alpha = x'\mathsf{e}_1 + y'\mathsf{e}_2$. En general, las componentes x e y de cualquier vector rotado están relacionadas con el *seno* y el *coseno* del ángulo de rotación. Las definiciones de estas funciones son $\sin\alpha = y/r$ y $\cos\alpha = x/r$, respectivamente. Así, la rotación que lleva a P_1, cuyas coordenadas son (x_1, y_1), implica

$$\mathsf{r}_1 = \mathsf{R}_\alpha \mathsf{r} = x_1\mathsf{e}_1 + y_1\mathsf{e}_2 = r\cos\alpha\ \mathsf{e}_1 + r\sin\alpha\ \mathsf{e}_2. \tag{4.11}$$

Tras repetir la operación n veces, alcanzamos el vector P_n,

$$\mathsf{r}_n = (\mathsf{R}_\alpha)^n \mathsf{r} = x_n\mathsf{e}_1 + y_n\mathsf{e}_2 = r\cos(n\alpha)\mathsf{e}_1 + r\sin(n\alpha)\mathsf{e}_2. \tag{4.12}$$

A partir de una representación gráfica, sabemos cómo obtener el valor del seno y del coseno (midiendo los lados de un triángulo), y también sabemos sus valores para ciertos ángulos especiales, como $\theta = 2\pi$, π, $\pi/2$ o, incluso,

$\pi/4$. Sin embargo, lo que realmente necesitamos es una forma de calcularlas para cualquier valor de θ ($= n\alpha$).

Para determinar el valor del seno y del coseno para cualquier valor del ángulo, comenzaremos a partir de la serie (4.9), recordando que (4.10) da una forma de encontrar su n-ésima potencia simplemente reemplazando x por nx (y escribiendo $y = n$, ya que representa a *cualquier* número). Como x también representa a *cualquier* número, experimentemos un poco. Vamos a considerar $x = i\alpha$, donde i es la 'unidad imaginaria' que introdujimos por primera vez en la sección 5.2 del libro 1. El resultado es

$$e^{i\alpha} = 1 + i\alpha - \frac{\alpha^2}{2!} - i\frac{\alpha^3}{3!} + \dots, \tag{4.13}$$

donde hemos usado el hecho de que $i^2 = -1$, $i^3 = i \times i^2 = -i$, y así sucesivamente. Recogiendo todos los términos reales (es decir, sin factores i), descubrimos una nueva serie:

$$C_\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots, \tag{4.14}$$

y haciendo lo mismo, pero con los términos imaginarios, encontramos otra:

$$S_\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots. \tag{4.15}$$

Juntando ambas series vemos que

$$e^{i\alpha} = C_\alpha + iS_\alpha. \tag{4.16}$$

A partir de (4.10), vemos que también hay un resultado similar cuando reemplazamos α por un ángulo grande $n\alpha$,

$$e^{in\alpha} = C_{n\alpha} + iS_{n\alpha}, \tag{4.17}$$

donde $C_{n\alpha}$ y $S_{n\alpha}$ son como (4.14) y (4.15), respectivamente, pero con $n\alpha$ en vez de α.

Ahora, echemos un vistazos al punto donde comenzamos. La ecuación (4.11) nos da las coordenadas de P_1 después de rotar OP_0 un ángulo muy pequeño α. Despreciando potencias mayores que α^2, los valores (definidos geométricamente) de $\sin\alpha$ y $\cos\alpha$ son $\sin\alpha \approx \alpha$ y $\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$, respectivamente. Éstos son los términos importantes en las series (4.14) y (4.15). Para ángulos pequeños, $C_\alpha \to \cos\alpha$ y $S_\alpha \to \sin\alpha$. A partir de estos valores preliminares, podemos continuar bien (i) haciendo más rotaciones en pasos de α, obteniendo (4.12) tras n pasos, bien (ii) multiplicando $e^{i\alpha}$ por el mismo factor (en cada paso), hasta obtener $e^{in\alpha}$ después de n pasos. Los dos procesos son equivalentes. Así, tomamos un proceso cualquiera y decimos que

$$\cos(n\alpha) = C_{n\alpha} \qquad \text{y} \qquad \sin(n\alpha) = S_{n\alpha} \tag{4.18}$$

son las expresiones algebraicas para el coseno y el seno de *cualquier* ángulo $n\alpha$.

De este modo, para cualquier ángulo θ tenemos las expresiones generales

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots \qquad \text{y} \qquad \sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots. \tag{4.19}$$

Además, teniendo cuenta $n\alpha = \theta$ en (4.17), tendremos que

$$e^{i\theta} = \exp i\theta = \cos(\theta) + i\sin(\theta). \tag{4.20}$$

Los resultados anteriores nos llevan a otros. Por ejemplo, para cualquier θ podemos elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación (4.20), obteniendo así

$$e^{2i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 + 2i\sin\theta\cos\theta.$$

Sin embargo, también sabemos que

$$e^{2i\theta} = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

ç y (como vimos en la sección 5.2 del libro 1) que dos números complejos son iguales sólo si sus partes reales e imaginarias son iguales por separado. Comparando las dos últimas ecuaciones vemos que

$$\cos(2\theta) = (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 \qquad \text{y} \qquad \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta. \tag{4.21}$$

Así, pues, conociendo el valor del seno y del coseno de cualquier ángulo puedes obtener fácilmente los valores que corresponden al ángulo doble. Por ejemplo, sabemos que $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ (a partir de un triángulo rectángulo con lados 1, 1, $\sqrt{2}$). Doblando el ángulo obtenemos $\sin(\pi/2) = 1$ y $\cos(\pi/2) = 0$; volviéndolo a doblar, $\sin(\pi) = 0$ y $\cos(\pi) = -1$; y doblándolo de nuevo otra vez, $\sin(2\pi) = 1$ y $\cos(2\pi) = 0$. El ultimo resultado nos muestra que el ángulo 2π (ó 360 grados) no es diferente ce cero; cada rotación de 2π no aporta nada nuevo. Se dice que la dependencia del seno o el coseno con el ángulo es **periódica**, es decir, toman el mismo valor siempre que el ángulo se incrementa en una cantidad de 2π, denominada **período**. En otras palabras,

$$e^{2\pi i} = 1. \tag{4.22}$$

Esta relación, que conecta los dos números irracionales, e y π, con la unidad imaginaria, i, es uno de los resultados más importantes de todas las matemáticas.

El seno y el coseno de la *suma* de dos ángulos se obtienen de la misma manera que los del ángulo doble. Tomando

$$\exp i(\theta_1 + \theta_2) = \exp i\theta_1 \times \exp i\theta_2,$$

usando (4.20) y expandiendo el lado derecho de la igualdad, encontramos (inténtalo por ti mismo) que

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2, \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) &= \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Esto es todo lo que necesitas saber sobre los ángulos; el resto puede aprenderlo por ti mismo. Hace mucho tiempo, en la escuela, cuando toda la geometría se hacía a la manera de Euclides, teníamos que aprender todos estos resultados (y muchos más) de memoria, repitiéndolos uno y otra vez. Y ello porque los pitagóricos rechazaron su gran descubrimiento de la geometría algebraica, dejándoselo al matemático francés René Descartes (1596-1650), quien lo redescubrió más de mil años después. Ahora puedes obtener esos resultados siempre que los necesites recordando únicamente las propiedades de índices y haciendo un poco de álgebra simple.

Ejercicios

(1) Halla los resultados etiquetados como “tercer grado” y “cuarto grado” (que aparecen tras la ecuación (4.5)) mediante la multiplicación de los resultados que ya conoces.

(2) Deriva los resultados (4.13) a (4.20) partiendo de (4.9) y realizando todos los pasos del desarrollo.

(3) Utilizando (4.23), encuentra las expresiones para $\cos(\theta_1 - \theta_2)$, $\sin(\theta_1 - \theta_2)$, $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$, $\cos 3\theta$ y $\sin 3\theta$.

Capítulo 5

El espacio tridimensional

5.1. Planos y cajas en tres dimensiones: las coordenadas

Como todos sabemos desde que nacemos, el espacio 'físico' real en el que vivimos *no* es un espacio bidimensional o plano en el que un punto venga especificado dado solo dos números que definan su posición. Hay puntos 'sobre' y 'debajo de' cualquier plano y para definir sus posiciones necesitamos un tercer número que nos diga cuán lejos hacia arriba o hacia abajo estamos. De nuevo, como en la sección 1.2, referiremos cualquier punto a un conjunto de ejes perpendiculares que se cruzan en un punto O, el origen, aunque ahora habrá tres ejes en vez de dos. Hasta ahora hemos estado hablando sobre la geometría *del plano* o *planar*. A partir de ahora nos moveremos en el espacio tridimensional y nos referiremos a geometría *sólida*. No obstante, las ideas básicas no son demasiado diferentes. Comenzaremos a partir de un axioma, al igual que hicimos con el espacio bidimensional, referente a la *distancia* más corta entre dos puntos. Después estableceremos unos pocos teoremas a partir de los cuales uno puede derivar toda la geometría sólida simplemente razonando de forma *algebraica*. Aunque, por supuesto, no desarrollaremos todo ello, sino que será suficiente con ver que *puede* hacerse.

De acuerdo con el primer axioma (ver sección 1.2), la línea recta es el camino más corto entre dos puntos. De la definición de plano (ver sección 1.2) se sigue que si dos planos se cortan, el corte viene dado por una *línea recta*, ya que si dos puntos A y B están contenidos en ambos planos, habrá un camino único recto AB que los una. Además, todos los puntos sobre AB caerán igualmente en ambos planos (es decir, AB, que puede ser tan larga como deseemos, es la línea sobre la que los planos se cortan).

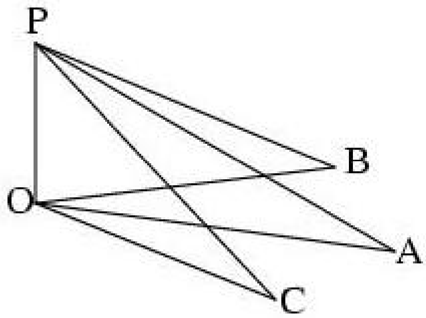


Figura 15

A partir de esta conclusión, podemos enunciar el primer teorema:

> *Teorema*. Si una línea recta es perpendicular a otras *dos* que cruza en un punto común, entonces también es perpendicular a *todas* las que estén contenidas sobre el mismo plano y que pasen a través de ese punto. Esta línea es *perpendicular al plano*.

La prueba se sigue de la Fig. 15, donde OP es perpendicular a OA y OB, siendo el ángulo OAB un ángulo recto. Sea OC cualquier línea recta sobre el plano OAB que pasa a través de O. Debemos demostrar que COP también es un ángulo recto. Esto sólo sucede si $PC^2 = OP^2 + OC^2$, lo cual se demuestra en dos pasos. Primero, sabemos que $PB^2 = OP^2 + OB^2 = OP^2 + OA^2 + AB^2 = AP^2 + AB^2$ y, por tanto, PAB también es un ángulo recto. Segundo, tenemos que $PC^2 = PA^2 + AC^2 = OA^2 + OP^2 + AC^2 = OC^2 + OP^2$. Esto prueba el teorema.

De lo anterior se siguen otros dos resultados simples:

- La perpendicular desde un punto a un plano es el camino más corto desde dicho punto a un punto sobre el plano.
- Si una línea recta es perpendicular a otras dos que cruza en algún punto, entonces las otras dos caen sobre el mismo plano.

Estas dos afirmaciones son 'corolarios' del teorema, siendo el segundo el **contrario** del primero (dice lo mismo, pero al revés).

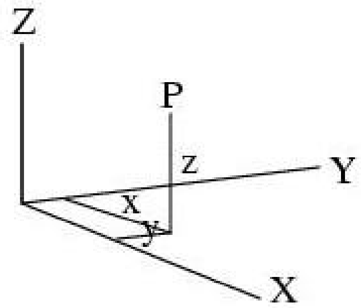


Figura 16

Coordenadas cartesianas en tres dimensiones

Ahora ya estamos en condiciones de definir las coordenadas cartesianas (rectangulares) de cualquier punto P en el espacio tridimensional. Para empezar, tomamos un plano OXY y dicho punto P, que no está contenido en el plano, como se ve en la Fig. 16. Si Q es el punto proyectado (perpendicularmente) del punto P sobre el plano, PQ será el único camino más corto desde P al plano. A esta distancia la llamamos z. Cualquier punto Q que caiga sobre el plano está definido de forma unívoca (ver sección 2.2) expresando sus coordenadas bidimensionales (x e y) con respecto a los ejes OX y OY. Así, pues, la posición de P queda completamente definida una vez damos los *tres* números x, y y z, como en la Fig. 16. Además, en el caso de z, debemos asignarle un signo ($\pm$) para indicar si P está *sobre* el plano o *por debajo*. Por convenio, establecemos que z será positivo (estará sobre el 'lado positivo' del plano) cuando una rotación que lleve a OX sobre OY un 'tornillo' (con su extremo justo bajo el punto O hacia arriba (hacia P).

Los tres ejes OX, OY y QP no se han elegido al azar, ya que el tercero de ellos debe pasar a través del punto P. En general, nos gustaría poder hablar sobre *todos* los puntos del espacio, y no sólo sobre aquellos que se encuentran sobre una línea especial QP. Es decir, queremos un conjunto de tres ejes perpendiculares (OX, OY y OZ) tales que todos pasen a través de un origen común (O) y que puedan utilizarse para describir *todos* los puntos. Para ello, necesitamos un teorema

> *Teorema.* Dos líneas rectas perpendiculares a un mismo plano son paralelas entre sí.

La prueba de este teorema se sigue de la Fig. 17, donde se considera que las líneas BA y DC son perpendiculares al plano BDE y E se ha elegido de tal manera que DE es perpendicular a DB (es decir, BDE es un ángulo recto). En primer lugar, debemos demostrar que EDA también es un ángulo recto, y que CD, DA y DB deben, por tanto, estar contenidas en el mismo plano (según establece el teorema anterior). Ambas cosas se demuestran fácilmente teniendo en cuenta que $AE^2 = AB^2 + BE^2 = AB^2 + BD^2 + DE^2 = AD^2 + DE^2$. De esta relación se sigue que EDA es un ángulo recto y que las líneas DB, DA, BA y DC están contenidas por el mismo plano. Además de esto, BA y DC son perpendiculares al plano BDE y, por tanto, son perpendiculares a la línea BD que las cruza. Así, pues, apelando a la *definición* dada al comienzo de la sección 2.1, BA y DC son *paralelas*, lo cual demuestra el teorema.

Una vez más, este teorema tiene su inverso:

> *Teorema inverso.* Si dos líneas rectas son paralelas y una de ellas es paralela a un plano, entonces la otra también lo es.

Del teorema anterior y su inverso se sigue una cadena entera de resultados. Aquí simplemente nos limitaremos a decir cuáles son cuando los necesitemos (pero sin probarlos), comenzando con una definición:

> *Definición.* Si dos planos son perpendiculares a la misma línea recta, entonces son **planos paralelos**.

De este resultado se desprende que una perpendicular que una ambos planos partiendo de un punto cualquier sobre uno de ellos tendrá la misma longitud independientemente del punto elegido. Esta longitud es la *distancia más corta* entre ambos planos. Si dos pares de puntos (A, B) y (C, D) están conectados de esta manera, entonces forman los vértices de un *rectángulo*, cuyos lados opuestos tienen la misma longitud.

5.2. Describiendo objetos simples en tres dimensiones

En tres dimensiones proceder exactamente igual a como hemos hecho con el espacio bidimensional. De nuevo, tomamos O como el **origen** y representamos los **ejes rectangulares** OX, OY y OZ, siendo cada uno de ellos perpendicular a los otros, tal como se muestra en la Fig. 18. Así, pues, a cualquier punto P en el espacio tridimensional se le pueden asignar unas coordenadas rectangulares o cartesianas, (x, y, z), que miden las distancias más cortas a

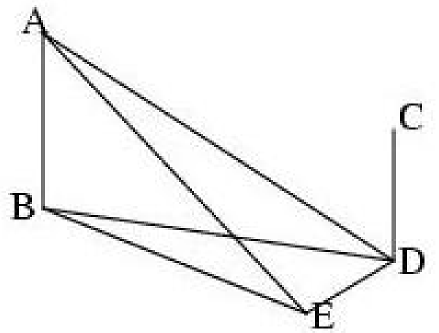


Figura 17

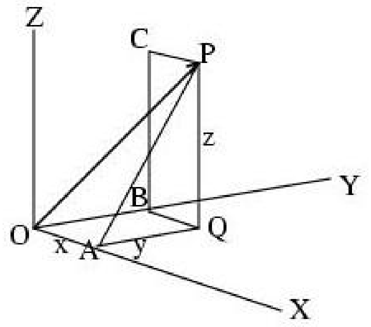


Figura 18

los planos OYZ, OZX y OXY, respectivamente. Estas distancias dan también las longitudes de las **proyecciones** de la línea OP (Fig. 18) sobre los tres ejes, OX, OY y OZ. Por ejemplo, la proyección OA es la línea desde el origen O hasta el pie (A) de la perpendicular que va desde P hasta el eje X, siendo las longitudes OA y QB iguales (son lados opuestos del rectángulo $OAQB$; como se sigue del último teorema, ambas líneas son perpendiculares al plano OYZ).

La geometría del espacio bidimensional (ver sección 2.2) estaba basaba en la ecuación (2.1), que nos daba la distancia entre dos puntos cualquiera, P y P', y en la ecuación (2.2), que se satisface cuando dichos puntos están muy juntos. En el espacio tridimensional, las cosas son bastante parecidas, excepto que ahora tenemos tres coordenadas. La distancia (r) desde el origen O hasta cualquier punto P viene dada por

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{5.1}$$

mientras que la separación (dr) entre dos puntos infinitamente próximos se sigue de

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{5.2}$$

donde dx, dy y dz son **diferenciales**, es decir, un punto P' tiene coordenadas (con respecto a P) $x' = x + dx$, $y' = y + dy$ y $z' = z + dz$.

De nuevo, (5.2) es la 'forma de la métrica fundamental', aunque ahora en el espacio tridimensional real. Como tiene forma de suma de cuadrados en cualquier punto (y, de acuerdo con (5.1), en cualquier región independientemente de su extensión), el espacio es euclídeo, satisfaciendo todas las propiedades descubiertas por Euclides. Cualquier *plano* se denomina **subespacio** de dos dimensiones del espacio tridimensional y cualquier línea recta es un subespacio de una dimensión. Al igual que la geometría plana se deriva de las ecuaciones (2.1) y (2.2), que vimos en la sección 2.2, toda la *geometría sólida* se deriva de las ecuaciones (5.1) y (5.2).

En el espacio tridimensional, el objeto geométrico más simple es la línea recta, aunque ahora cada punto de la línea vendrá caracterizado por tres coordenadas. En el espacio bidimensional las coordenadas x e y de un punto sobre una recta estaban *relacionadas* mediante la expresión $y = mx + c$, donde m y c fijan la pendiente de la recta y su punto de cruce con el eje Y. Así, pues, tomábamos x como la 'variable independiente' que determinaba el valor de y (la 'variable dependiente'). En el espacio tridimensional las cosas son un poco más complicadas, ya que la línea no necesariamente caerá sobre uno de los planos coordenados; puede estar dirigida en cualquier dirección. Y lo mismo sucede con el siguiente objeto más simple, el plano, que puede poseer cualquier **orientación**. En la próxima sección volveremos sobre estos objetos, una vez hayamos encontrado la forma de ocuparnos de ellos mediante el 'álgebra vectorial'. Por el momento, es suficiente con saber que líneas y planos vienen descritos por ecuaciones *lineales*, que sólo involucran *primeras* potencias de las variables x, y y z (los círculos, por ejemplo, requieren ecuaciones donde aparecen potencias más altas o productos). Los ejemplos más simples son los propios planos coordenados. Por ejemplo, $z = 0$ (constante) describe el plano que contiene a los ejes OX y OY; igualmente, $z = p$ (constante) define un plano paralelo a OXY, a una distancia p del origen. En ambos casos, cualquier punto sobre el plano se determina asignando, como queramos, distintos valores a las coordenadas x e y.

El objeto sólido más simple (después del **cubo**, que tiene seis caras planas) es la **esfera**, que es el análogo al círculo en el espacio bidimensional. La esfera tiene una única superficie *curva* y las coordenadas de cualquier punto sobre la superficie están relacionadas mediante una ecuación de *segundo* orden. La distancia de un punto P (x, y, z) desde el origen viene dada por

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{5.3}$$

Esta distancia da el radio de la esfera, que es el mismo para todos los puntos sobre su superficie. Así, (5.3) es la ecuación para la superficie de una esfera centrada en el origen. Si desplazas la esfera (al igual que si lo haces con una línea o un plano), la ecuación correspondiente será un poco más complicada. Esto se debe a que nuestras descripciones están basadas en la elección de un conjunto de ejes que se cruzan en el centro de la esfera, usando tres distancias (coordenadas) para definir cualquier punto. El conjunto de ejes se denomina **marco de referencia**. Si decidimos cambiar el marco de referencia de manera que el origen ya no sea el centro, todas las coordenadas también cambiarán.

Por otra parte, los objetos que nos encontramos en el espacio tridimensional tienen ciertas *propiedades* medibles (al igual que sucedía con la longitud o el área) que 'pertenecen' al objeto y no dependen en absoluto de la elección del marco de referencia. Como se señaló en el capítulo 3, esas propiedades son **invariantes**. Nos gustaría mantener nuestras ecuaciones tan simples y cercanas como fuese posible a lo que estemos describiendo. Por ejemplo, una línea es un *vector* y podríamos caracterizarla mediante un único símbolo (en vez de un conjunto de números que cambiarán siempre que cambiemos el marco de referencia). En la próxima sección vamos a ver cómo hacer esto.

5.3. Utilizando vectores en tres dimensiones

En la teoría algebraica ordinaria de números (ver capítulo 4 del libro 1) representábamos los números bien mediante puntos sobre una línea recta, bien mediante *desplazamientos* que iban desde un origen a dichos puntos. Los desplazamientos son, de hecho, **vectores** en un espacio de una dimensión, siendo cada vector un múltiplo de un 'paso' unidad que denominábamos e. Cualquier vector a puede escribirse como $\mathsf{a} = a\mathsf{e}$, donde a es un número que indica 'cuántos' pasos debemos tomar en la dirección e. Si a es un entero, el desplazamiento llevará a un punto etiquetado por un entero. Sin embargo, como vimos en el libro 1, esta representación puede generalizarse al caso en el que a es cualquier número real y a es el vector que lleva al punto respectivo sobre la representación gráfica. Las reglas para combinar vectores en un espacio monodimensional se dieron en el libro 1; la *suma* de dos desplazamientos, a y b, se obtiene poniendo uno a continuación del otro (el punto final de uno es el punto inicial de l otro), sin importar cuál de ellos se toma primero. Así,

$$\mathsf{a} + \mathsf{b} = \mathsf{b} + \mathsf{a}, \tag{5.4}$$

y si hay tres vectores, tampoco importa cómo los combinemos,

$$(\mathsf{a} + \mathsf{b}) + \mathsf{c} = \mathsf{a} + (\mathsf{b} + \mathsf{c}). \tag{5.5}$$

También podemos multiplicar un vector por cualquier número real, al igual que cuando escribimos a como un número de veces a de unidades e: $\mathsf{a} = a\mathsf{e}$.

Intentemos hacer lo mismo ahora en el espacio tridimensional. En primer lugar, ahora habrá tres tipos diferentes de pasos unidad (a lo largo de los ejes X, Y y Z) que denominaremos e_1, e_2 y e_3, respectivamente. Estos serán los **vectores base** de nuestro álgebra, que tomamos de longitud unidad ('pasos unidad'). Un vector que señala desde el origen O al punto P (x, y, z)

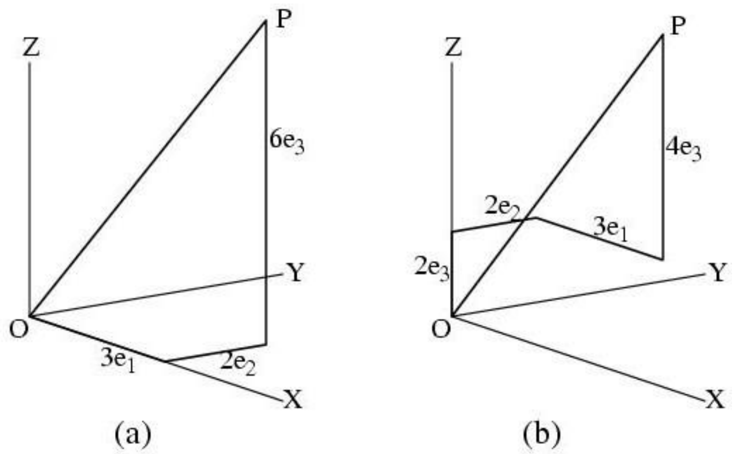


Figura 19

(es decir, con coordenadas cartesianas x, y y z) será representado mediante r y escrito como

$$\mathsf{r} = x\mathsf{e}_1 + y\mathsf{e}_2 + z\mathsf{e}_3. \tag{5.6}$$

En realidad, esta es la *regla* para ir desde O a P. Por ejemplo, si las coordenadas son enteros, como $x = 3$, $y = 2$ y $z = 6$, la regla sería "recorrer 3 pasos de tipo e_1, 2 de tipo e_2 y 6 de tipo e_3" (y habrás llegado). De todos modos, lo realmente destacable es que, aunque los términos en (5.6) están en direcciones diferentes, el orden en el que los tengamos en cuenta es irrelevante. Por ejemplo, en vez del caso anterior, podemos tomar 2 pasos paralelos al eje Z (tipo e_3), 2 pasos paralelos al eje Y (tipo e_2), 3 pasos más del tipo e_1 y finalmente 4 pasos, de nuevo, del tipo e_3; también de esta manera llegaremos al mismo punto. Esto puede verse inmediatamente en la Fig. 19; recuerda que (debido a que los ejes son *perpendiculares*) el espacio está 'estructurado' en rectángulos, cuyos lados opuestos son iguales. De hecho, las reglas (5.4) y (5.5) se aplican generalmente a la suma de vectores.

Un punto importante que debemos resaltar es que al combinar los términos de (5.6), se debe permitir que los vectores sean elementos 'flotantes' en tanto permanezcan paralelos a los ejes. Por ese motivo se los denomina 'vectores libres, ya que no están ligados a ningún punto especial del espacio. Por otra parte, el **vector posición** r se define como un vector que va del origen O al punto particular P. Es un 'vector ligado'.

Los números x, y y z en (5.6), aparte de ser coordenadas de P, son también **componentes** de su vector posición. Cualquier vector puede expresarse de una manera similar:

$$\begin{aligned}\mathsf{a} &= a_1\mathsf{e}_1 + a_2\mathsf{e}_2 + a_3\mathsf{e}_3 \\ \mathsf{b} &= b_1\mathsf{e}_1 + b_2\mathsf{e}_2 + b_3\mathsf{e}_3,\end{aligned}$$

y la suma de vectores conlleva la suma de sus componentes correspondientes. Así, reagrupando los términos de la suma de los vectores a y b, tendremos

$$\mathsf{a} + \mathsf{b} = (a_1 + b_1)\mathsf{e}_1 + (a_2 + b_2)\mathsf{e}_2 + (a_3 + b_3)\mathsf{e}_3. \tag{5.7}$$

Igualmente, la multiplicación de un vector por cualquier número real c se expresa en términos de sus componentes como

$$c\mathsf{a} = ca_1\mathsf{e}_1 + ca_2\mathsf{e}_2 + ca_3\mathsf{e}_3. \tag{5.8}$$

Finalmente, observa que el álgebra vectorial del espacio tridimensional euclídeo es muy similar al álgebra de números reales ordinaria (ver capítulo 3 del libro 1). Hay una 'unidad respecto de la suma' que puede sumarse a cualquier vector sin cambiarlo que se denota mediante el vector $\mathsf{0}$: $\mathsf{0} = 0\mathsf{e}_1 + 0\mathsf{e}_2 + 0\mathsf{e}_3$. Además, cualquier vector a tiene un 'inverso respecto de la suma', $-\mathsf{a} = -a_1\mathsf{e}_1 - a_2\mathsf{e}_2 - a_3\mathsf{e}_3$, tal que $-\mathsf{a} + \mathsf{a} = \mathsf{0}$.

5.4. Producto escalar y producto vectorial

A partir de dos vectores, a y b, se pueden definir dos tipos especiales de 'producto' que dependa de sus longitudes (a, b) y el ángulo que forman (θ). (En general, la longitud de un vector a se escribe como $a = |a|$ y se denomina **módulo** de a.)

> *Definición.* El **producto escalar**, $\mathsf{a} \cdot \mathsf{b}$, se define mediante la relación $\mathsf{a} \cdot \mathsf{b} = ab\cos\theta$.
>
> *Definición.* El **producto vectorial**, $\mathsf{a} \times \mathsf{b}$, se define mediante la relación $\mathsf{a} \times \mathsf{b} = ab\sin\theta\ \mathsf{c}$, donde c es un *nuevo* vector unidad **normal** (es decir, perpendicular) al plano donde se encuentran contenidos a y b, y que apunta de tal manera que al girar a hacia b un tornillo (a derechas) lo haría en la dirección de c.

El producto 'escalar' es simplemente un número (en Física, un 'escalar' es una cantidad que no está asociada a ninguna dirección en particular), mientras que el producto vectorial está relacionado con el *área* de la porción de superficie definida por los dos vectores (c señala 'hacia arriba' desde la superficie, como si indicase cuál es su lado 'de arriba', al igual que sucedía cuando establecimos por primera vez el eje z). Ambos productos satisfacen la propiedad 'distributiva':

$$(\mathsf{a}+\mathsf{b})\cdot\mathsf{c} = \mathsf{a}\cdot\mathsf{c}+\mathsf{b}\cdot\mathsf{c}, \qquad (\mathsf{a}+\mathsf{b})\times\mathsf{c} = \mathsf{a}\times\mathsf{c}+\mathsf{b}\times\mathsf{c},$$

aunque, teniendo en cuenta su definición, el producto vectorial cambia de signo si el orden de los vectores se invierte ($\mathsf{b}\times\mathsf{a} = -\mathsf{a}\times\mathsf{b}$). Por tanto, independientemente de lo que hagamos, debemos mantener el orden apropiado.

Los vectores unidad e_1, e_2 y e_3 tienen cada uno módulo unidad ($|\mathsf{e}_1| = |\mathsf{e}_2| = |\mathsf{e}_3| = 1$) y además son perpendiculares entre sí ($\mathsf{e}_1\cdot\mathsf{e}_2 = \mathsf{e}_1\cdot\mathsf{e}_3 = \mathsf{e}_2\cdot\mathsf{e}_3 = 0$). El producto escalar entre cualquier par de vectores a y b se pueda escribir, en términos de sus componentes, como

$$\begin{aligned}\mathsf{a}\cdot\mathsf{b} &= (a_1\mathsf{e}_1 + a_2\mathsf{e}_2 + a_3\mathsf{e}_3)\cdot(b_1\mathsf{e}_1 + b_2\mathsf{e}_2 + b_3\mathsf{e}_3)\\ &= a_1b_1\mathsf{e}_1\cdot\mathsf{e}_1 + \ \ldots\ + a_1b_2\mathsf{e}_1\cdot\mathsf{e}_2 + \ \ldots\end{aligned}$$

Por tanto, a partir de las propiedades de los vectores unidad citadas anteriormente, tendremos que

$$\mathsf{a}\cdot\mathsf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{5.9}$$

Si $\mathsf{b} = \mathsf{a}$, entonces $\mathsf{a}\cdot\mathsf{a} = a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, que la fórmula que conocíamos para la suma de cuadrados para el cálculo de la longitud del vector a. Si se trata del vector posición r de un punto P cualquiera, tendremos

$$OP = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{5.10}$$

De igual forma, el producto escalar de dos vectores posición r y r' es

$$\mathsf{r}\cdot\mathsf{r}' = rr'\cos\theta = xx' + yy' + zz',$$

el cual nos indica cómo determinar el ángulo entre ambos vectores. Recuerda que x, y y z son las proyecciones de r sobre los tres ejes de coordenadas. Por tanto, $x/r = \cos\alpha$ (α es el ángulo entre r y el eje x) e, igualmente, $x'/r' = \cos\alpha'$ para el segundo vector. Los cosenos de los ángulos entre un vector y los tres ejes se denominan **cosenos dirección** del vector y se denotan mediante l, m y n. Utilizando esta notación, la ecuación anterior puede reescribirse como

$$\cos\theta = ll' + mm' + nn', \tag{5.11}$$

que es una manera simple de obtener el ángulo θ, aplicable a *cualesquiera* dos vectores tridimensionales.

5.5. Algunos ejemplos

Para finalizar este capítulo, es interesante revisar unos cuantos ejemplos sobre cómo puedes describir puntos, líneas, planos y formas simples en tres dimensiones mediante el lenguaje vectorial. Utilizando vectores puedes obtener a menudo los resultados que necesitas de una manera mucho más sencilla que dibujando complicados diagramas y pensando en todos los 'casos especiales' que podrían darse.

- *Los ángulos de un triángulo.* En la sección 1.2, consideramos el teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo como el 'axioma de la métrica'. Hay muchos teoremas relacionados con los triángulos que no hemos mencionado, muchos de ellos referidos a triángulos generales, sin ángulos especiales. Consideremos uno de esos triángulos, con vértices A, B y C, utilizando las mismas letras para etiquetar los ángulos correspondientes (A, B y C, respectivamente), y las letras minúsculas a, b y c para etiquetar las longitudes de los lados *opuestos* a cada uno de esos ángulos, respectivamente. Además, podemos hacer uso de los símbolos a, b y c para denotar *vectores* que señalen a lo largo de los lados respectivos, estando uno a continuación del otro en sentido antihorario. (Antes de continuar, deberías hacer una representación gráfica del triángulo ABC, etiquetando sus lados y ángulos, de manera que puedas tener una idea del mismo en tu mente.)

  Hay dos 'leyes' básicas que relacionan los senos y cosenos de los ángulos de un triángulo. La primera se obtiene muy fácilmente: si trazas una perpendicular desde el vértice C hasta la línea que pasa a través de A y B, denominando a esta longitud h, tendrás que $\sin A = h/b$ y $\sin B = h/a$, y por tanto que $h = b \sin A = a \sin B$. Si divides la última expresión por ab, obtendrás que $(\sin A)/a = (\sin B)/b$. Si tomas a continuación el vértice A, encontrarás un resultado similar. Así, juntando estos resultados, ves que

  $$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}. \tag{5.12}$$

  Esta es la 'ley del seno', que se cumple para cualquier triángulo plano.

  Observa que la suma de los vectores a, b y c es zero ($\mathsf{a}+\mathsf{b}+\mathsf{c} = \mathsf{0}$), ya que son desplazamientos que van uno a continuación del otro alrededor del triángulo y, independientemente de donde tomes el inicio, finalmente te llevan al mismo punto de partida. Por tanto, $\mathsf{a} = -(\mathsf{b} + \mathsf{c})$. Según esta expresión, el cuadrado de la longitud de a es

  $$a^2 = \mathsf{a} \cdot \mathsf{a} = (\mathsf{b} + \mathsf{c}) \cdot (\mathsf{a} + \mathsf{c}) = \mathsf{a} \cdot \mathsf{a} + \mathsf{b} \cdot \mathsf{b} + 2\mathsf{a} \cdot \mathsf{b} = b^2 + c^2 + 2\mathsf{b} \cdot \mathsf{c}.$$

A partir de la definición de producto escalar (ver sección 5.2), $\mathsf{b} \cdot \mathsf{c} = bc \cos\theta$ cuando ambos vectores señalan *hacia afuera* desde el punto de intersección, lo que significa girar c, convirtiéndolo en $-\mathsf{c}$. Teniendo en cuenta esto, junto con el proceso análogo para los otros lados (que se obtienen repitiendo la operación mencionada antes, pero considerando los vértices A y C en vez de B), nos da la 'ley del coseno':

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ca \cos C. \end{aligned} \tag{5.13}$$

- *Ecuación vectorial de una línea recta.* Supongamos que queremos determinar la línea que pasa a través del punto A, con vector posición a, y que es paralela a un vector dado b —que puede ser de longitud unidad o *unitario* ($b^2 = \mathsf{b} \cdot \mathsf{b} = 1$). Un punto cualquier P sobre la línea, con vector posición r, vendrá dado por la ecuación

  $$\mathsf{r} = \mathsf{a} + s\mathsf{b}, \tag{5.14}$$

  donde s es cualquier número variable. Esta es la ecuación que necesitamos. Si en vez de esa ecuación, lo que queremos es la ecuación de una recta que pase a través de dos puntos A y B (con vectores posición a y b, respectivamente), simplemente reemplazaremos b en la ecuación (5.14) por el vector $\mathsf{b} - \mathsf{a}$, que apunta de A á B. El resultado final es

  $$\mathsf{r} = \mathsf{a} + s(\mathsf{b} - \mathsf{a}).$$

- *Ecuación vectorial de un plano.* Supongamos que ON es la **normal** al plano, trazada desde el origen de coordenadas O al pie de la perpendicular al plano, representado por el punto N (que, obviamente, está contenido en dicho plano), y que n es un vector unitario en la dirección ON ($\vec{ON} = p\mathsf{n}$, donde p es la distancia perpendicular desde O al punto N, contenido en el plano). Si r es el vector posición de un punto cualquiera P contenido en el plano, su *proyección* (ver sección 5.2) sobre la línea ON debe tener la misma longitud p. Es decir,

  $$\mathsf{r} \cdot \mathsf{n} = p \tag{5.15}$$

  será la ecuación que define al plano con normal unitaria n y localizado a una distancia p del origen.

- *Distancia de un punto a un plano.* La distancia perpendicular desde el origen a un punto P *contenido en el plano*, dada por (5.15), es $p = \mathsf{r} \cdot \mathsf{n}$. Igualmente, dado *cualquier otro* punto P', con vector posición r', la distancia desde el origen será $p' = \mathsf{r}' \cdot \mathsf{n}$, donde estamos considerando que el punto P' está contenido en un plano paralelo (con la misma normal n). La distancia requerida es, por tanto,

  $$d = p' - p = \mathsf{r}' \cdot \mathsf{n} - p,$$

  que será positiva cuando P' esté *sobre* el plano dado (definido por P), yendo desde el origen hacia afuera y en la dirección n.

- *Intersección de dos planos.* El ángulo θ entre dos planos mide el ángulo entre sus respectivas normales y se deriva de la relación

  $$\cos\theta = \mathsf{n} \cdot \mathsf{n}',$$

  donde n y n' son los dos unitarios normales. Si θ es cero, los planos serán paralelos. En cualquier otro caso, dichos planos se cortan. Para determinar la región de corte, debemos darnos cuenta de que un punto (con vector posición r) que caiga sobre ambos planos debe satisfacer las ecuaciones de ambos planos al mismo tiempo, es decir, $\mathsf{r} \cdot \mathsf{n} = p$ y $\mathsf{r} \cdot \mathsf{n}' = p'$. En tal caso se dice que cae sobre la línea de intersección. Multiplicando ambas ecuaciones por cualesquiera dos números c y c' y sumando después el resultado, obtendremos

  $$\mathsf{r} \cdot (c\mathsf{n} - c'\mathsf{n}') = cp - c'p'.$$

  Esta es la ecuación de un plano con su normal en la dirección $c\mathsf{n} - c'\mathsf{n}'$, es decir, de un plano atravesado por la línea de intersección de los planos anteriores y que depende de los valores asignados a c y c'.

  Ahora, un vector $d\mathsf{n} + d'\mathsf{n}'$ (d y d' son dos números a determinar), que comience en el origen, contendrá las normales a ambos planos (n y n') y, por tanto, cortará la línea de intersección. Tomamos este vector como el vector a de la ecuación (5.14), eligiendo d y d' de tal manera que el punto caiga sobre ambos planos. Así, pues, ya sólo necesitamos la dirección, el vector unitario b de la ecuación (5.14), para fijar la recta. Como la recta de intersección es perpendicular a ambas normales, podemos tomar b como el *vector producto* $\mathsf{n} \times \mathsf{n}'$, definido en la sección 5.4. Juntando todo esto, obtenemos finalmente la ecuación de la recta de intersección,

  $$\mathsf{r} = d\mathsf{n} + d'\mathsf{n}' + s\mathsf{n} \times \mathsf{n}', \tag{5.16}$$

  donde el valor de s varía a medida que te desplazas sobre la recta.

- *Ecuación de una esfera.* Ya nos hemos encontrado antes, en la sección 5.2, con la ecuación de una esfera centrada en el origen, en términos de las coordenadas cartesianas. Consideremos ahora el caso de una esfera centrada en un punto C (con vector posición c) y radio R. La distancia desde C a la superficie de la esfera es la longitud del vector $\mathsf{r} - \mathsf{c}$ y la condición de que el punto r caiga sobre dicha superficie es $|\mathsf{r} - \mathsf{c}|^2 = R^2$. Expandiendo esta expresión obtenemos

$$r^2 - 2\mathsf{r} \cdot \mathsf{c} + (c^2 - R^2) = 0, \tag{5.17}$$

  que es la ecuación de una esfera centrada en el punto c.

- *Intersección de una línea recta con una esfera.* Supongamos que la línea viene descrita por (5.14) y la esfera por (5.17); el punto r debe satisfacer ambas ecuaciones. Si introducimos la primera de estas ecuaciones en la segunda, obtendremos

$$(\mathsf{a} - s\mathsf{b}) \cdot (\mathsf{a} - s\mathsf{b}) - 2(\mathsf{a} - s\mathsf{b}) \cdot \mathsf{c} + (c^2 - R^2) = 0.$$

  Ésta contiene las potencias primera y segunda de la variable s y, por tanto, es una ecuación cuadrática (ver sección 5.3 del libro 1), que puede escribirse como

$$As^2 + Bs + C = 0,$$

  donde

$$\begin{aligned} A &= b^2 = 1, \\ B &= 2\mathsf{b} \cdot (\mathsf{a} - \mathsf{c}), \\ C &= a^2 + c^2 - R^2 - 2\mathsf{a} \cdot \mathsf{c}. \end{aligned}$$

  Como sabemos, habrá dos raíces, ambas reales, cuando $B^2 > 4AC$. Estos valores de s fijan los dos puntos donde la línea recta corta a la superficie de la esfera. Si B^2 y $4AC$ son idénticamente iguales, los dos puntos son el *mismo* y la recta sólo toca la superficie de la esfera en un punto. Dicha línea se dice que es **tangente** a la superficie de la esfera.

Ejercicios

(1) Encontrar un vector unitario perpendicular a los vectores $\mathsf{v}_1 = 2\mathsf{e}_1 - \mathsf{e}_2 + \mathsf{e}_3$ y $\mathsf{v}_2 = 3\mathsf{e}_1 + 4\mathsf{e}_2 - \mathsf{e}_3$. Calcular el ángulo entre v_1 y v_2.

(2) Encontrar dos vectores que trazan ángulos idénticos con e_1, son perpendiculares entre sí y son perpendiculares a $\mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_2 + \mathsf{e}_3$.

(3) ¿Cuál es la ecuación vectorial de una línea recta que pasa a través de los puntos $\mathsf{e}_1 - 2\mathsf{e}_2 + \mathsf{e}_3$ y $3\mathsf{e}_3 - 2\mathsf{e}_2$? ¿Dónde corta esta línea al plano que contiene al origen y a los puntos $4\mathsf{e}_2$ y $2\mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_2$?

(4) Demostrar que la línea que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado y su longitud es la mitad de éste.

(5) Demostrar que los tres puntos cuyos vectores posición son a, b y $3\mathsf{a} - 2\mathsf{b}$ caen sobre la misma recta.

(6) Encontrar la ecuación de la recta que pasa a través del punto con vector de posición d y traza ángulos idénticos con los vectores a, b y c.

(7) Determinar la ecuación del plano que contiene al punto $2\mathsf{e}_1 + 3\mathsf{e}_2 - \mathsf{e}_3$ y que es perpendicular al vector $3\mathsf{e}_1 - 4\mathsf{e}_2 + 7\mathsf{e}_3$.

(8) Demostrar que ambos puntos, $\mathsf{e}_1 - \mathsf{e}_2 + 3\mathsf{e}_3$ y $3(\mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_2 + \mathsf{e}_3)$, están a la misma distancia del plano $\mathsf{r} \cdot (5\mathsf{e}_1 + 2\mathsf{e}_2 - 7\mathsf{e}_3) + 9 = 0$, pero en lados opuestos.

Capítulo 6

Áreas y volúmenes: la invariancia

6.1. Invariancia de longitudes y ángulos

Al final de la sección 5.2, observábamos que los objetos tridimensionales poseen propiedades 'inherentes' que no cambian si los desplazamos de un lugar a otro del espacio —claro, siempre y cuando no los doblemos, retorzamos o cambiemos sus formas 'naturales'. Por ejemplo, los objetos pueden ser barras o varillas, caracterizados por su propia *longitud*; placas, caracterizadas por su *área*; o ladrillos o cubos, caracterizados por su *volumen*. Todas esas propiedades son *invariantes* bajo **transformaciones** que simplemente desplazan un objeto de un lugar a otro. En la última sección establecimos, además, los fundamentos para describir matemáticamente la invariancia, utilizando símbolos sencillos (vectores) para representar los elementos de espacio —por ejemplo, la separación entre dos puntos en un objeto venía dada por un vector $\mathsf{d} = d_1\mathsf{e}_1 + d_2\mathsf{e}_2 + d_3\mathsf{e}_3$, cuya longitud no cambia cuando el objeto se desplaza. De hecho, tales transformaciones tienen la propiedad fundamental de *dejar invariantes las distancias y los ángulos*, los cuales definen la forma del objeto. Esta propiedad fue utilizada por los griegos cuando desarrollaron la geometría plana (por ejemplo, al comparar dos triángulos para ver si eran exactamente iguales, es decir, si uno podía ser puesto encima del otro, de tal manera que coincidiesen sus lados y ángulos). Los griegos usaban representaciones gráficas, sin embargo nosotros lo que estamos haciendo es recurrir a métodos *algebraicos* y trabajar en tres dimensiones (geometría sólida) en vez de en dos. Es aquí precisamente donde los vectores resultan más útiles.

Consideremos que los vectores posición de los puntos P y Q, relativos a un

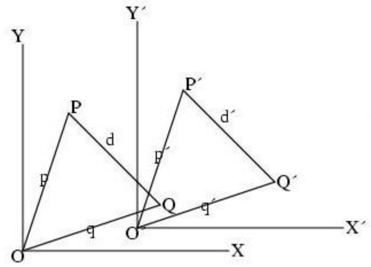


Figura 20

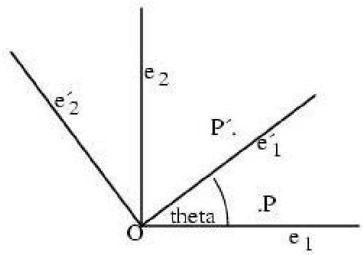


Figura 21

origen O y a un conjunto de vectores unitarios $\{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3\}$, se pueden escribir como

$$\mathsf{p} = p_1\mathsf{e}_1 + p_2\mathsf{e}_2 + p_3\mathsf{e}_3 \qquad \mathsf{q} = q_2\mathsf{e}_1 + q_2\mathsf{e}_2 + q_2\mathsf{e}_3,$$

donde (para evitar confusiones) utilizamos p_1, p_2 y p_3 para las componentes de p en vez de x, y y z (con las componentes de Q hacemos lo mismo). El vector que apunta de P a Q (que se representa a menudo como $\vec{PQ}$) viene dado por la *diferencia*

$$\vec{PQ} = \mathsf{d}_{PQ} = \mathsf{q} - \mathsf{p} = (q_1 - p_1)\mathsf{e}_1 + (q_2 - p_2)\mathsf{e}_2 + (q_3 - p_3)\mathsf{e}_3.$$

La transformación más sencilla que podemos realizar es una **traslación**, en la que un punto P es desplazado al lugar de su **imagen** P', con vector posición $\mathsf{p}' = \mathsf{p} + \mathsf{t}$, donde t es un vector constante. Está claro, según la Fig. 20, que el vector de P' a Q' es exactamente el mismo que el que va de P a Q (antes de haber desplazado el objeto). Esta idea puede expresarse mediante la ecuación

$$\mathsf{d}_{P'Q'} = \mathsf{q}' - \mathsf{p}' = (\mathsf{q} + \mathsf{t}) - (\mathsf{p} + \mathsf{t}) = \mathsf{q} - \mathsf{p} = \mathsf{d}_{PQ}. \tag{6.1}$$

El vector que separa ambos dos puntos es *invariante* bajo traslación.

A continuación consideremos el hecho de *rotar* el objeto hasta alcanzar una nueva posición. Esto es más difícil porque ahora un punto imagen P' tiene un vector posición p' que se relaciona con p de una manera más compleja. Sin embargo, podemos estudiar un caso simple, como es la rotación de un objeto alrededor de un eje, por ejemplo, el eje z, con vector unitario e_3. Una rotación cambia los elementos de espacio, pero no los números. Así, veamos lo que sucede con los vectores e_1, e_2 y e_3. En la Fig. 21 se muestra que una rotación de un ángulo θ alrededor de e_3 (que apunta hacia fuera de la página) posee el siguiente efecto:

$$\begin{aligned} \mathsf{e}_1 \to \mathsf{e}_1' &= \cos\theta\mathsf{e}_1 + \sin\theta\mathsf{e}_2, \\ \mathsf{e}_2 \to \mathsf{e}_2' &= -\sin\theta\mathsf{e}_1 + \cos\theta\mathsf{e}_2, \\ \mathsf{e}_3 \to \mathsf{e}_3' &= \mathsf{e}_3, \end{aligned} \tag{6.2}$$

donde cada vector unitario se convierte en su imagen bajo la rotación; únicamente e_3 (a lo largo del eje z) se mantiene tal cual.

Ahora, un punto P, con vector posición $\mathsf{p} = p_1\mathsf{e}_1 + p_2\mathsf{e}_2 + p_3\mathsf{e}_3$, se convierte en P', que se relaciona exactamente de la misma manera con los vectores unitarios *nuevos* que resultan de la rotación (nada más ha cambiado) y que están dados por (6.2). El vector posición del punto imagen P' es, por tanto,

$$\mathsf{p}' = p_1(\cos\theta\mathsf{e}_1 + \sin\theta\mathsf{e}_2) + p_2(-\sin\theta\mathsf{e}_1 + \cos\theta\mathsf{e}_2) + p_3\mathsf{e}_3,$$

cuando se expresa en términos de los vectores unitarios que teníamos antes de que la rotación tuviese lugar. Esta expresión puede reagruparse y escribirse como

$$\mathsf{p}' = p'_1\mathsf{e}_1 + p'_2\mathsf{e}_2 + p'_3\mathsf{e}_3,$$

donde

$$\begin{aligned} p'_1 &= \cos\theta p_1 - \sin\theta p_2, \\ p'_2 &= \sin\theta p_1 + \cos\theta p_2, \\ p'_3 &= p_3. \end{aligned} \tag{6.3}$$

El nuevo vector p' es, claramente, muy diferente de p. Sin embargo, esto no constituye ninguna sorpresa, ya que lo que estamos investigando es precisamente la invariancia de *longitudes* y *ángulos*. Ahora demostraremos que la longitud del segmento QP queda preservada durante la rotación (tú puedes demostrar lo mismo para el ángulo definido por los segmentos OP y OQ).

Todo lo que tenemos que hacer es confirmar que $p'^2_1 + p'^2_2 + p'^2_3$ (el cuadrado de la longitud de OP') es igual que antes de la rotación. A partir de (6.3), vemos que los tres términos son

$$\begin{aligned} p'^2_1 &= (\cos\theta)^2 p_1^2 + (\sin\theta)^2 p_2^2 - 2(\cos\theta\sin\theta)p_1p_2, \\ p'^2_2 &= (\sin\theta)^2 p_1^2 + (\cos\theta)^2 p_2^2 + 2(\cos\theta\sin\theta)p_1p_2, \\ p'^2_3 &= p_3^2. \end{aligned}$$

Sumando estos términos y recordando que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ para cualquier ángulo θ, obtenemos finalmente el resultado esperado,

$$p'^2_1 + p'^2_2 + p'^2_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2. \tag{6.4}$$

La longitud de cualquier vector permanece invariante bajo la rotación de un objeto.

Después de demostrar que los ángulos entre dos vectores cualquiera también son invariantes, podemos dar por garantizado que una transformación de este tipo (rotación alrededor del eje z) deja invariante la forma de un objeto, su área superficial y su volumen.

Ahora debemos centrarnos en las ideas de área y volumen con un poco más de detalle, aunque antes hemos de señalar que lo que hemos dicho sobre la rotación alrededor de un eje especial se cumple para *toda* clase de rotaciones. Esto es fácil de entender, ya que, como hemos visto, un objeto se define en referencia a tres vectores unitarios; su imagen (tras la rotación) se define de la misma manera, pero en términos de las imágenes correspondientes a los vectores unitarios. Por tanto, por ahora nos basta con saber que e_1, e_2 y e_3 se transforman bajo la rotación. Además, también sabemos que un vector unitario rotado, que señala en *cualquier* dirección, puede ser determinado a partir de los correspondientes *cosenos dirección* (introducidos justo antes de la ecuación (5.11)). Si utilizamos l_1, m_1 y n_1 para fijar la imagen e'_1 en función de su base original (procediendo de igual manera con el resto de vectores unitarios), obtendremos la forma más general de la transformación,

$$\begin{aligned} \mathsf{e}_1 \to \mathsf{e}'_1 &= l_1\mathsf{e}_1 + m_1\mathsf{e}_2 + n_1\mathsf{e}_3, \\ \mathsf{e}_2 \to \mathsf{e}'_2 &= l_2\mathsf{e}_1 + m_2\mathsf{e}_2 + n_2\mathsf{e}_3, \\ \mathsf{e}_3 \to \mathsf{e}'_3 &= l_3\mathsf{e}_1 + m_3\mathsf{e}_2 + n_3\mathsf{e}_3. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Estos vectores mantendrán sus longitudes unidad originales siempre que

$$\mathsf{e}_1 \cdot \mathsf{e}_1 = l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad \text{etc.} \tag{6.6}$$

y se mantendrán perpendiculares entre sí ($\cos\theta = 0$) si se cumple que

$$\mathsf{e}_1 \cdot \mathsf{e}_2 = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0, \quad \text{etc.} \tag{6.7}$$

de acuerdo con (5.11). Estas son las condiciones generales que debe satisfacer cualquier rotación para que la imagen de un objeto se mantenga exactamente igual que el objeto original antes de la rotación. Cuando todas las distancias y ángulo se conservan de esta forma, se dice que el objeto y su imagen son **congruentes**. De hecho, casi toda la geometría euclídea está basada en la idea de congruencia.

6.2. Áreas y volúmenes

A partir de la idea de longitud como la distancia entre los extremos de una vara de medir, en el capítulo 3 definíamos el área de la superficie de un objeto rectangular plano (una placa, por ejemplo). Decíamos que esta cantidad, que era el producto de dos longitudes, tenía "dimensión L^2" y se medía contando el número de 'unidades de área' (por ejemplo, baldosas) que se necesitaban para cubrirla por completo. Al pasar de 2 a 3 dimensiones también se puede utilizar una idea análoga. La definición más simple de *volumen* de una caja, cuyos lados son rectángulos, es volumen = producto de las longitudes de los 3 lados, una cantidad que posee dimensión L^3. El volumen se mide contando el número de 'unidades de volumen' (por ejemplo, ladrillos) que se necesitan para rellenarlo por completo —ver capítulo 2 del libro 1, donde ya empleamos esta idea para establecer las propiedades de la multiplicación de números; el número de ladrillos de una pared (Fig. 7) era el producto de tres números, los números que marcaban cada una de las dimensiones del muro: largo, ancho y alto.

Resumiendo, en lenguaje vectorial, tenemos que

- Longitud (se define mediante un vector a) $= a = |\mathsf{a}|$
- Área (se define mediante dos vectores, a y b) $= ab$
- Volumen (se define mediante tres vectores, a, b y c) $= abc$

donde los vectores vienen dados a lo largo de la dirección de la medida, siendo todos ellos perpendiculares entre sí. Obviamente, hemos considerado que los objetos son rectangulares (hemos trabajado en todo momento con coordenadas rectangulares) y que la longitud, el área o el volumen medidos pueden completarse mediante un número entero de unidades. Sin embargo, cuando esto no es así, aún sabemos que podemos dividir las unidades en 'sub-unidades' cada vez más pequeñas para evitar el problema. En el caso de un área, las "romperíamos" en pedazos más pequeños (por ejemplo, triángulos de área conocida) de manera que se ajusten cada vez mejor dentro del área que estamos intentando medir. Encontrar el área de un círculo (ver sección 3.1) mediante el método de Arquímedes es un bello ejemplo de lo que estamos diciendo. En pocas palabras, podemos 'determinar de forma precisa' la magnitud que estamos intentado medir haciendo que caiga entre un 'esto' y un 'aquello', donde el 'esto' y el 'aquello' son una **cota superior** y una **cota inferior**, respectivamente. Esto significa que, en principio, puede medirse mediante un número real (por lo general, irracional; ver libro 1) de forma tan precisa como queramos.

Todo lo anterior es aplicable a las definiciones de longitud, área y volumen de formas simples. En general, necesitaremos recurrir a ideas de otras ramas de las matemáticas, como el **cálculo infinitesimal**, de las que nos ocuparemos más adelante, en otros libros. No obstante, las cosas comienzan a parecer ya un poco extrañas, ya que cualquier longitud, según las definiciones anteriores, se mide mediante el vector distancia entre dos puntos, que se considera positivo únicamente porque normalmente no importa que se refiera a 'ir' o 'venir' (y, por tanto, decidimos usar el *módulo* del vector). Igualmente, en lenguaje vectorial, el área se puede definir como un producto vectorial; la forma que se muestra en la Fig. 22 (denominada **paralelogramo**), con dos pares de lados paralelos, dos de los cuales son los vectores a y b, tiene un **vector área**

$$\mathsf{A} = \mathsf{a} \times \mathsf{b} = ab \sin\theta_{ab}\mathsf{n}, \tag{6.8}$$

donde n es un vector unitario 'normal' (es decir, perpendicular) a la superficie. (Observa que ya no estamos refiriendonos a rectángulos, pues los vectores a y b forman un ángulo θ_{ab}.) La **normal** se determina (como en la definición que sigue a la ecuación (5.8)) de manera que señale en el sentido de un 'tornillo que giro a derechas' en relación a a y b. Cuando hablamos del área de la superficie, normalmente estamos pensando en la *magnitud* del vector área, $A = |\mathsf{A}|$. Sin embargo, si necesitamos conocer la diferencia entre 'arriba' y 'abajo', siempre debemos recordar que el vector área A puede llevar un signo ($\pm$). Cuando nos refiramos al *volumen*, nos encontraremos con problemas muy similares. Por tanto, debemos ocuparnos de ambas cosas con un poco más de detalle.

Nota. En una primera lectura puedes saltarte las próximas secciones. Sin embargo, echa un vistazo al capítulo 7.

6.3. El área expresada en forma vectorial

El vector área es importante cuando pensamos en algo que cruce o pase a través de una superficie. Si la superficie es el extremo abierto de una tubería, la normal n puede mostrarnos la dirección en la que fluye el agua (por ejemplo, 'hacia afuera', a lo largo de n, cuando el vector de (6.8) es una cantidad positiva de veces n). Si pensamos en la superficie curvada de un paraguas, el vector área resultante nos dirá cuánto nos cubrirá de la lluvia que cae.

Cualquier tipo de superficie puede construirse a partir de pequeños elementos (por ejemplo, rectángulos con lados de longitud a y b), cada uno con un vector área $\mathsf{A} = A\mathsf{n}$ (donde n se elige de acuerdo con la 'regla de la mano derecha'). Así, tomemos uno de esos elementos, escribiendo su vector área como $\mathsf{A} = A_1\mathsf{e}_1 + A_2\mathsf{e}_2 + A_3\mathsf{e}_3$, donde (realizando el producto escalar con e_1) $A_1 = \mathsf{A} \cdot \mathsf{e}_1$ (lo mismo sucede con el resto de componentes). La componente A_3 es la *proyección* de A a lo largo de la dirección e_3 (el eje z de la Fig. 23), es decir, la proyección sobre el plano XY. Cada elemento de la superficie tiene su propia proyección. Sumando todas las proyecciones obtendremos la

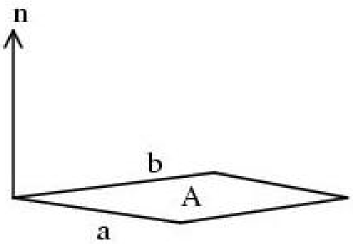


Figura 22

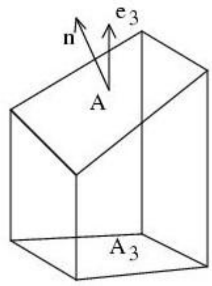


Figura 23

proyección del vector área sobre el plano XY correspondiente a la *superficie completa*. Si el plano XY es el suelo y la superficie es un trozo de tabla que utilizas para protegerte de la lluvia, entonces

$$A_3 = \mathsf{A} \cdot \mathsf{e}_3 = A\mathsf{n} \cdot \mathsf{e}_3.$$

Esta proyección será el área total de la tabla cuando la agarras horizontalmente, de manera que $\mathsf{n} \cdot \mathsf{e}_3 = 1$. Sin embargo, si la agarras de lado, de tal forma que n sea paralelo al suelo, entonces $\mathsf{n} \cdot \mathsf{e}_3 = 0$ y el área proyectada será cero (no te cubrirá en absoluto).

El vector área es un concepto muy útil, como veremos en otros libros. Por ejemplo, el vector área de cualquier superficie *cerrada* (como la de una caja rectangular) es siempre *cero*. Observa que, en este ejemplo, lados opuestos tienen el mismo área, pero sus normales (apuntando hacia afuera de la superficie) tienen direcciones opuestas, de manera que el vector suma es cero. Éste es un resultado general, que significa que nada puede fluir hacia afuera o hacia adentro a través de una superficie cerrada (para ello deberías hacer un agujero en ella).

Antes de comenzar con el volumen, será útil mostrar cómo el vector área puede escribirse en términos de componentes. El vector área de un elemento de superficie definido en la Fig. 22 mediante los vectores a y b, con $\mathsf{a} = a_1\mathsf{e}_1 + a_2\mathsf{e}_2 + a_3\mathsf{e}_3$ y $\mathsf{b} = b_1\mathsf{e}_1 + b_2\mathsf{e}_2 + b_3\mathsf{e}_3$, es $\mathsf{A} = \mathsf{a} \times \mathsf{b}$. Recordando que $\mathsf{e}_1 \times \mathsf{e}_2 = \mathsf{e}_3 = -\mathsf{e}_2 \times \mathsf{e}_1$ etc. y que $\mathsf{e}_1 \times \mathsf{e}_1 = 0$, etc., tendremos que A puede expresarse como

$$\begin{aligned} \mathsf{a} \times \mathsf{b} &= (a_1\mathsf{e}_1 + a_2\mathsf{e}_2 + a_3\mathsf{e}_3) \times (b_1\mathsf{e}_1 + b_2\mathsf{e}_2 + b_3\mathsf{e}_3) \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)\mathsf{e}_3 - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathsf{e}_2 + (a_2b_3 - a_3b_2)\mathsf{e}_1. \end{aligned}$$

Para recordar este tipo de resultados, debemos observar que cada componente depende de dos subíndices (por ejemplo, en el primer caso de '1' y '2') y está multiplicada por -1 si cambiamos su orden (por ejemplo, en el caso '1,2' $\to$ '2,1') —es **antisimétrico** bajo el intercambio de subíndices. Para este tipo de cantidades existe una notación especial; escribimos

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \; a_1b_3 - a_3b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \; a_2b_3 - a_3b_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

de tal manera que, de cada ordenamiento a la derecha, la componente correspondiente de la izquierda resulta del producto de los números de la 'diagonal principal' (por ejemplo, a_1, b_2) *menos* el producto de los de la 'diagonal secundaria' (por ejemplo, b_1, a_2). Utilizando esta notación, el producto vectorial anterior puede expresarse como

$$\mathsf{a} \times \mathsf{b} = \mathsf{e}_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathsf{e}_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathsf{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{6.9}$$

Cada ordenamiento, con la regla para 'realizar la multiplicación' que permita obtener un único número, se denomina **determinante**. En próximos libros nos volveremos a encontrar con los determinantes. Determinantes similares a estos pueden construirse con cualquier número de filas y columnas, los cuales pueden 'expandirse' en términos de otros determinantes más pequeños. Para demostrar cuán útiles pueden ser ayudarnos a recordar cosas bastante complicadas, echemos un vistazo a la expresión para el producto vectorial (6.9) como si se tratase de un *único* determinante con *tres* filas y columnas. Así, pues, tendremos

$$\mathsf{a} \times \mathsf{b} = \begin{vmatrix} \mathsf{e}_1 & \mathsf{e}_2 & \mathsf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{6.10}$$

Para expandir este determinante '3×3' como (6.9), hay que tomar el elemento de la primera fila y la primera columna (e_1) y multiplicarlo por el determinante '2×2' que queda cuando eliminas dichas fila y columna. A continuación, consideras el siguiente elemento de la primera fila (e_2) y procedes de la misma manera, multiplicando por el determinante que resulta de eliminar la primera fila y la *segunda* columna. Una vez hecho esto, pasas al último elemento de la primera fila (e_3) y lo multiplicas por el determinante que queda cuando eliminas la primera fila y la columna que lo contiene. Finalmente, sumas las tres contribuciones que has obtenido (una para e_1, otra para e_2 y una tercera para e_3), aunque al desplazarte a lo largo de la primera columna (tal como hemos hecho) no debes olvidarte de *multiplicar las contribuciones alternas por* -1. Si utilizas esta recta tan sencilla, obtendrás (6.9).

Ahora ya si que estamos listos para determinar el volumen de una 'caja' (denominada **paralelepípedo**) que viene definida por tres vectores $\{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$,

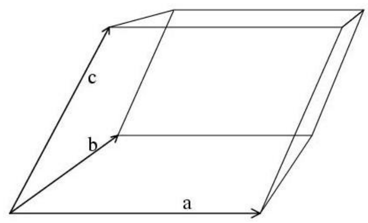


Figura 24

como en la Fig. 24. Éste es el 'elemento de volumen' en el espacio tridimensional.

6.4. El volumen expresado en forma vectorial

En la Fig. 24 vemos que el objeto representado puede reconstruirse por completo a partir de láminas finas, cada una con la forma de un paralelogramo con área $ab \sin\theta_{ab}$ y grosor d, es decir, con un volumen $abd \sin\theta_{ab}$. Juntando un cierto número de este tipo de láminas, una sobre otra, uno puede obtener de forma aproximada el volumen de cualquier objeto con tres conjuntos de caras paralelas (un paralelepípedo). La cara de arriba estará a una altura $h = nd$ sobre la cara de abajo, siendo el volumen total (el de las n láminas) $abh \sin\theta_{ab}$. Ahora, $h = c\cos\phi$, donde c es la longitud del vector c y ϕ es el ángulo que traza con respecto a la vertical (la normal al plano que contiene a a y b). Por tanto, tendremos que

$$V = abc \sin\theta_{ab} \cos\phi.$$

Esta fórmula será exacta en el límite en el que consideramos un gran número de láminas muy finas.

Al igual que hicimos al ocuparnos del área, ahora también podemos expresar el resultado anterior de un modo más conveniente en términos de sus componentes. El factor $ab \sin\theta_{ab}$ es el módulo del vector área correspondiente al paralelogramo $\mathsf{A} = A\mathsf{n}$ (n es la normal saliente de la Fig. 22), mientras que $c\cos\phi = \mathsf{n}\cdot\mathsf{c}$ (ϕ es la letra griega 'phi'). Así, la fórmula del volumen se puede expresar como un **producto triple**,

$$V = (\mathsf{a} \times \mathsf{b}) \cdot \mathsf{c} = \mathsf{c} \cdot (\mathsf{a} \times \mathsf{b}). \tag{6.11}$$

Obviamente, el vector c no es especial en absoluto; si dibujamos la Fig. 24 con los vectores b y c a lo largo de los lados del plano de abajo en vez de considerar a y b, obtendremos una fórmula diferente para el mismo volumen. De este modo, vemos que

$$\begin{aligned} V &= \mathsf{a} \times \mathsf{b} \cdot \mathsf{c} = \mathsf{b} \times \mathsf{c} \cdot \mathsf{a} = \mathsf{c} \times \mathsf{a} \cdot \mathsf{b} \\ &= \mathsf{a} \cdot \mathsf{b} \times \mathsf{c} = \mathsf{b} \cdot \mathsf{c} \times \mathsf{a} = \mathsf{c} \cdot \mathsf{a} \times \mathsf{b} \end{aligned}$$

son todas ellas expresiones para el mismo volumen. Las posiciones relativas de 'puntos' y 'cruces' no importan, razón por la que el vector producto triple se suele escribir a menudo como $[\mathsf{a}\ \mathsf{b}\ \mathsf{c}]$, de manera que el último resultado se expresa como

$$V = [\mathsf{a}\ \mathsf{b}\ \mathsf{c}] = [\mathsf{b}\ \mathsf{c}\ \mathsf{a}] = [\mathsf{c}\ \mathsf{a}\ \mathsf{b}],$$

donde las diferentes formas proceden de un **intercambio cíclico**: $abc \rightarrow bca \rightarrow cab$. Observa que cuando los tres vectores forman un sistema que satisface la regla de la mano derecha, como en la Fig. 24, el volumen V dado en esta forma es siempre una cantidad positiva. Sin embargo, si cambias este orden, el signo del resultado se invierte. Aunque no necesitamos preocuparnos por esto (normalmente sólo nos interesa la *magnitud* del volumen), es preciso mantenerlo en mente.

Finalmente, vamos a expresar V en términos de las componentes rectangulares de los vectores a, b y c, como hicimos en el caso del vector área. Así, escribiendo $V = \mathsf{a} \cdot \mathsf{b} \times \mathsf{c}$ y utilizando la ecuación (6.9), pero con b y c en lugar de a y b, obtendremos

$$V = (a_1\mathsf{e}_1 + a_2\mathsf{e}_2 + a_3\mathsf{e}_3) \cdot \left(\mathsf{e}_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - \mathsf{e}_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + \mathsf{e}_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right).$$

A partir de las propiedades de los vectores unitarios cartesianos, ($\mathsf{e}_1 \cdot \mathsf{e}_1 = 1$, $\mathsf{e}_1 \cdot \mathsf{e}_2 = 0$, etc.) esto nos lleva a

$$V = \left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right).$$

Como podemos comprobar, ésta es la forma expandida de un determinante '3×3', como en (6.10). Por tanto, podemos escribir

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{6.12}$$

Éste es un resultado muy general; los vectores a, b y c pueden apuntar en cualquier dirección y tener cualquier longitud. Conociendo sus tres componentes espaciales podremos determinar de forma precisa el elemento de volumen que definen.

Ejercicios

(1) Usar la ecuación (6.3), que describe la rotación de un vector tridimensional alrededor de un eje común, para demostrar que el ángulo entre dos vectores cualquiera, p y q, permanece invariante tras la rotación.

(2) Demostrar que la magnitud del vector área definido por los vectores a y b, así como el volumen del paralelepípedo definido por los vectores a, b y c, son también invariantes bajo la rotación (6.3).

(3) Desarrollar el volumen del paralelepípedo del ejercicio anterior y los vectores área de sus seis caras en el caso en el que los vectores a, b y c son

$$\mathsf{a} = 3\mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_2, \qquad \mathsf{b} = \mathsf{e}_1 + 2\mathsf{e}_2, \qquad \mathsf{c} = \mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_2 + 2\mathsf{e}_3.$$

Haz un dibujo en el que los vectores área estén representados mediante flechas.

(4) Además del producto triple (6.11), que es una magnitud escalar, existe también el producto triple *vectorial*. Dados tres vectores a, b y c, este producto se define como el producto vectorial de a con $\mathsf{b}\times\mathsf{c}$: $\mathsf{P}_{abc} = \mathsf{a}\times(\mathsf{b}\times\mathsf{c})$. Como P_{abc} es perpendicular a a y $\mathsf{b}\times\mathsf{c}$, mientras que el último es perpendicular al plano que contiene a b y c, el producto triple caerá *sobre* el plano formado por b y c. Demostrar que

$$\mathsf{P}_{abc} = (\mathsf{a}\cdot\mathsf{c})\mathsf{b} - (\mathsf{a}\cdot\mathsf{b})\mathsf{c}.$$

(Esta demostración es bastante difícil, la cual no utilizaremos a menos que queramos probar (7.19), al final de este libro. Para obtener el resultado, deberías introducir los vectores unitarios perpendiculares $\{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3\}$, donde e_2 es paralelo a b y e_3 está contenido en el plano definido por b y c. A partir de ahí, puedes escribir $\mathsf{b} = b\mathsf{e}_2$ y $\mathsf{c} = c_2\mathsf{e}_2 + c_3\mathsf{e}_3$, y también tomar $\mathsf{a} = a_1\mathsf{e}_1 + a_2\mathsf{e}_2 + a_3\mathsf{e}_3$. Una vez expresados los productos vectoriales que aparecen en $\mathsf{P}_{abc} = \mathsf{a}\times(\mathsf{b}\times\mathsf{c})$ en términos de las componentes de $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$, deberías encontrar (observando que $\mathsf{b}\times\mathsf{c} = bc_3\mathsf{e}_2\times\mathsf{e}_3 = bc_3\mathsf{e}_1$) que $\mathsf{P}_{abc} = a_3bc_3\mathsf{e}_2 - a_2bc_3\mathsf{e}_3$. Esta expresión puede reescribirse —sumando y restando un término $a_2bc_2\mathsf{e}_2$— como

$$\mathsf{P}_{abc} = (a_2c_2 + a_3c_3)b\mathsf{e}_2 - a_2b(c_2\mathsf{e}_2 + c_3\mathsf{e}_3).$$

El resultado que queremos probar es el mismo que esta expresión cuando se expresamos los productos escalares en términos de sus componentes vectoriales.)

Capítulo 7

Otros tipos de espacios

7.1. Espacios multidimensionales

Hasta aquí hemos estado hablando principalmente sobre espacios euclídeos de 2 ó 3 dimensiones (espacios 2-dimensionales y 3-dimensionales). Estos son *espacios vectoriales* que contienen todos los vectores (v) que pueden ser expresados como $\mathsf{v} = v_1\mathsf{e}_1 + v_2\mathsf{e}_2$ (espacio 2-dimensional) ó $\mathsf{v} = v_1\mathsf{e}_1 + v_2\mathsf{e}_2 + v_3\mathsf{e}_3$ (espacio 3-dimensional), donde $\{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3\}$ son *vectores base* y los coeficientes $\{v_1, v_2, v_3\}$ son números algebraicos denominados *componentes vectoriales.* Para tener en cuenta ambos casos, podemos generalizar y escribir cualquier vector como

$$\mathsf{v} = v_1\mathsf{e}_1 + v_2\mathsf{e}_2 + \ \dots \ v_n\mathsf{e}_n, \tag{7.1}$$

donde $n = 2$ se aplicaría a un vector en dos dimensiones y $n = 3$ a uno en tres dimensiones. Recuerda que cada vector tiene una longitud (o magnitud) y una dirección, que a menudo se representa como una *flecha* con una longitud y una dirección dadas. (Los matemáticos denominan a la flecha "segmento lineal direccionado".)

Por otra parte, también debemos recordar que las componentes $\{v_1, v_2, \dots\}$ relacionan al vector con la base y, por tanto, nos posibilitan etiquetar cualquier punto P del espacio como $P(v_1, v_2, \dots)$. Los números $\{v_1, v_2, \dots\}$ son las componentes del **vector posición** (denotado a menudo mediante r) que corresponde a la línea OP, que apunta hacia el punto P desde el origen O. También se les suele denominar *coordenadas* del punto P. Hasta aquí hemos considerado siempre que los vectores base eran de *longitud unidad* y *perpendiculares* entre sí. En el lenguaje del capítulo 6, cualesquiera dos vectores base e_i y e_j tienen producto escalares

$$\begin{aligned} \mathsf{e}_i \cdot \mathsf{e}_j &= 1 \qquad \text{si } i = j \\ \mathsf{e}_i \cdot \mathsf{e}_j &= 0 \qquad \text{si } i \neq j \end{aligned} \tag{7.2}$$

para todo valor de i y j dentro del rango $1, 2, \ldots, n$. Ésta es la elección con la que comenzamos en el capítulo 1, considerándola como el "axioma de la métrica" para el espacio 2-dimensional. La misma elección, pero con $n = 3$, nos conduce al espacio 3-dimensional del capítulo 6. En cualquier caso, las propiedades (7.2) nos permiten expresar la longitud de cualquier vector como una 'suma de cuadrados'. En tres dimensiones, por ejemplo, tendremos

$$|\mathsf{v}|^2 = \mathsf{v} \cdot \mathsf{v} = (v_1\mathsf{e}_1 + v_2\mathsf{e}_2 + v_3\mathsf{e}_3) \cdot (v_1\mathsf{e}_1 + v_2\mathsf{e}_2 + v_3\mathsf{e}_3) = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2, \tag{7.3}$$

donde no hay términos cruzados tales como v_1v_2 debido a que $\mathsf{e}_1 \cdot \mathsf{e}_2 = 0$.

Los productos escalares de los vectores base se expresan a menudo en forma de ordenamiento cuadrado como el siguiente

$$\begin{pmatrix} \mathsf{e}_1 \cdot \mathsf{e}_1 & \mathsf{e}_1 \cdot \mathsf{e}_2 & \mathsf{e}_1 \cdot \mathsf{e}_3 \\ \mathsf{e}_2 \cdot \mathsf{e}_1 & \mathsf{e}_2 \cdot \mathsf{e}_2 & \mathsf{e}_2 \cdot \mathsf{e}_3 \\ \mathsf{e}_3 \cdot \mathsf{e}_1 & \mathsf{e}_3 \cdot \mathsf{e}_2 & \mathsf{e}_3 \cdot \mathsf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

Un ordenamiento de este tipo se denomina **matriz métrica** del espacio; todos los espacios de esta clase, en los que la longitud se puede definir en términos de (7.3), se llaman "espacios métricos".

Nada de lo que hemos dicho hasta ahora depende de que n sea igual a 2 ó 3; la generalización más simple de nuestras ideas sobre la geometría consiste en mantener todo, pero permitir que n puede ser mayor que tres. En tal caso hablamos de de "espacios n-dimensionales". El hecho de que no podamos imaginarlos porque estemos viviendo en un espacio 3-dimensional nos es importante. Si les podemos encontrar un uso, entonces los usaremos.

Así, consideremos el caso $n = 5$, que consideraremos como un ejemplo de espacio 5-dimensional. En el capítulo 6 del libro 1, hablábamos de un 'espacio' (aunque no lo llamábamos de esta manera) en el que había cinco *categorías* de estudiantes en una clase de 40. Las categorías se definían colocando a los estudiantes en grupos diferentes de acuerdo con sus alturas:

(a) dentro del rango 1 m 5 cm a 1 m 10 cm (4 estudiantes)

(b) dentro del rango 1 m 10 cm a 1 m 15 cm (8 estudiantes)

(c) dentro del rango 1 m 15 cm a 1 m 20 cm (13 estudiantes)

(d) dentro del rango 1 m 20 cm a 1 m 25 cm (12 estudiantes)

(e) dentro del rango 1 m 25 cm a 1 m 30 cm (3 estudiantes)

Los cantidades en cada una de estas cinco categorías muestran el 'estado' de la clase. Si utilizamos a para representar a un estudiante (no importa cuál de ellos) dentro de la categoría (a), b para uno dentro de la categoría (b), y así sucesivamente, podemos describir el estado de la clase simbólicamente como

$$\mathsf{s} = 4\mathsf{a} + 8\mathsf{b} + 13\mathsf{c} + 12\mathsf{d} + 3\mathsf{e}, \tag{7.5}$$

que, sorprendentemente, se parece mucho a un vector. Por ello, podemos denominarlo *vector estado*.

Los estudiantes de las cinco categorías pueden ser 'escogidos' o *seleccionados* introduciendo *operadores de selección* (como hicimos en el libro 1). Denominemos a estos operadores $\{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \ldots, \mathsf{E}\}$ de manera que A selecciona sólo los estudiantes dentro del grupo (a), y así sucesivamente. Estos operadores satisfacen (como ya vimos) las propiedades algebraicas

$$\mathsf{AA} = \mathsf{A}, \quad \mathsf{BB} = \mathsf{B}, \quad \ldots \quad \mathsf{EE} = \mathsf{E} \tag{7.6}$$

y, para pares de operadores *diferentes*,

$$\mathsf{AB} = \mathsf{BA} = 0,\ \mathsf{AC} = \mathsf{CA} = 0,\ \ldots\ \mathsf{DE} = \mathsf{ED} = 0. \tag{7.7}$$

Además, dentro del vector estado s actúan como

$$\mathsf{As} = 4\mathsf{a}, \quad \mathsf{Bs} = 8\mathsf{b}, \quad \ldots \quad \mathsf{Es} = 3\mathsf{e},$$

Esto muestra que cada uno selecciona una parte de la clase y que juntando todos los resultados de nuevo obtenemos la clase entera:

$$(\mathsf{A} + \mathsf{B} + \mathsf{C} + \mathsf{D} + \mathsf{E})\mathsf{s} = 4\mathsf{a} + 8\mathsf{b} + \ldots + 3\mathsf{e} = \mathsf{s}.$$

En otros términos,

$$\mathsf{A} + \mathsf{B} + \mathsf{C} + \mathsf{D} + \mathsf{E} = 1, \tag{7.8}$$

es decir, el 'operador unidad', que deja invariante cualquier vector estado. Los operadores que cumplen estas propiedades forman lo que los matemáticos denominan un “conjunto espectral”, que aquí hemos establecido mediante un ejemplo muy práctico en vez de en forma abstracta, como habría hecho un matemático de verdad.

Regresemos de nuevo a los espacios vectoriales. El álgebra constituye una manera de tratar la selección, y la geometría otra alternativa. Cuando utilizamos el vector (7.5) representando el ‘estado’ del colegio, estamos asumiendo en realidad que $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \ldots, \mathsf{e}$ son ‘vectores base’ o ‘pasos unitarios’ a lo largo de cinco ejes distintos. Además, podemos asignarles cualquier propiedad que queramos —por ejemplo, suponer que cada uno de ellos es perpendicular al resto, incluso aunque eso fuese imposible dentro de una mentalidad 3-dimensional. Así, pues, la matriz métrica ya no será (7.4); ahora tendrá cinco ‘unos’ a lo largo de la diagonal principal y ceros los restantes lugares. Puede parecer extraño, pero ¿qué importa? Únicamente estamos utilizando un *lenguaje* matemático y, por tanto, sólo depende de nosotros decidir cómo deberían comportarse los símbolos. Una vez que lo hemos decidido, podemos considerar s, en (7.5), como un vector 5-dimensional construido a partir de tomar 4 pasos del tipo a, 8 pasos del tipo b, y así sucesivamente, y luego sumarlos (por ejemplo, uno tras otro, como en la Fig. 19). La longitud al cuadrado de este vector, con su métrica, vendrá dada por la suma de los cuadrados de sus componentes.

Ahora podemos echar un vistazo a los operadores selección desde el punto de vista geométrico. Así, $\mathsf{As} = 4\mathsf{a}$ es simplemente la *proyección* del vector s sobre el eje definido por el vector unitario a, mientras que $\mathsf{Bs} = 8\mathsf{b}$ es su proyección sobre el eje b. La propiedad $\mathsf{AA} = \mathsf{A}$ significa únicamente que proyectar *dos veces* sobre un eje dado es equivalente a hacerlo una sola vez, mientras que $\mathsf{BA} = \mathsf{0}$ quiere decir que cualquier proyección sobre el eje a tendrá una proyección nula sobre el eje b (éste es el motivo por el que elegimos vectores unitarios perpendiculares, con productos escalares nulos).

Algunas veces es útil cambiar esta representación geométrica ligeramente. Por ejemplo, si queremos comparar dos clases diferentes —de tallas diferentes—, nos interesarían más los números *fraccionarios* que representan a los estudiantes de grupos distintos. En tal caso, podríamos utilizar un vector

$$\mathsf{s} = (4/40)\mathsf{a} + (8/40)\mathsf{b} + (13/40)\mathsf{c} + (12/40)\mathsf{d} + (3/40)\mathsf{e}$$

para describir el estado de la clase, donde las proyecciones a lo largo de los cinco ejes representarán dichas fracciones directamente. En tal caso, el ‘puntero’ s, que representa cómo los estudiantes están divididos entre los cinco grupos, no tendría propiedades demasiado elegantes. Si todos los estudiantes perteneciesen al mismo grupo (a), tendríamos $\mathsf{s} = (40/40)\mathsf{a} = \mathsf{a}$, lo que equivaldría a tener un vector *unitario* a lo largo del eje a, pero éste es sólo un caso muy particular. Así, pues, la pregunta que nos hacemos es: ¿es posible elegir las componentes del vector de manera que s sea *siempre* un vector unitario, pero que señalará en distintas direcciones de acuerdo con la división de estudiantes entre los cinco grupos?

Las componentes que hemos utilizado, $\{(4/40),\ (8/40),\ (13/40),\ (12/40),\ (3/40),\}$ no se comportan de esa manera —la suma de sus cuadrados no es igual a 1. Y la suma de de los propios números *tampoco* da 1. Así que, ¿por qué no tomar $\sqrt{4/40}, \sqrt{8/40}, \ldots, \sqrt{3/4}$? Procediendo de este modo, el vector que describe el estado de la clase será

$$\mathsf{s} = \sqrt{4/40}\ \mathsf{a} + \sqrt{8/40}\ \mathsf{b} + \sqrt{13/40}\ \mathsf{c} + \sqrt{12/40}\ \mathsf{d} + \sqrt{3/40}\ \mathsf{e}$$

y la suma de los cuadrados de sus componentes dará exactamente 1. Por tanto, sí que *es* posible representar el estado de la clase mediante un vector unitario que apunta, desde el origen en un espacio 5-dimensional, a una dirección tal que describe la fracción de estudiantes en cada una de las cinco categorías.

Si queremos comparar dos clases (para ver si las alturas de los estudiantes sigue el mismo patrón), sólo tenemos que preguntar si los vectores s_1 y s_2 apuntan, más o menos, en la misma dirección. Si es así, su producto escalar $\mathsf{s}_1 \cdot \mathsf{s}_2$ tendrá un valor cercano a 1. Si las clases son muy diferentes (por ejemplo, uno tiene 5 años y el otro 16), el producto escalar de los vectores será mucho más cercano a cero.

Este ejemplo trataba sobre estudiantes clasificados en categorías de acuerdo con sus alturas. Sin embargo, podríamos haber hablado sobre patatas de distintos tamaños o sobre objetos producidos en una fábrica, no todos ellos del tamaño apropiado (algunos demasiado grandes y otros demasiados pequeños). En todos estos casos, en los que nos referimos a categorías, podemos utilizar el mismo tipo de descripción vectorial. Es más, podemos elegir la métrica de cualquier manera que nos parezca útil para aquello que tengamos en mente (como veremos en las dos secciones que vienen a continuación).

7.2. El espacio-tiempo y la relatividad

El punto de partida de este libro era la idea de distancia y cómo ésta podía medirse usando una 'regla de medir' cuya **longitud** (la distancia entre sus extremos) era consideraba como la distancia unidad. Además, hicimos mención al **tiempo** y cómo éste podía medirse utilizando un 'reloj' cuyo péndulo, oscilando hacia adelante y hacia atrás, marcaba unidades de tiempo. Por último, también hablamos sobre la **masa** de un objeto, que podía medirse mediante

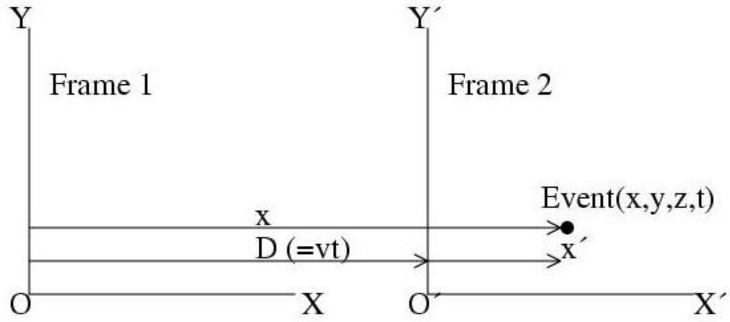


Figura 25

una balanza. Sin embargo, hasta ahora ni la masa ni el tiempo han entrado dentro de nuestra idea de espacio. Esta idea, por sí sola, nos ha permitido construir toda la geometría euclídea.

No obstante, aproximadamente desde 1904, esa visión ha cambiado. El espacio y el tiempo no siempre pueden separarse. No tiene ningún sentido dar mi dirección (mis 'coordenadas' espaciales) si no sigo viviendo allí —por tanto, mis coordenadas tal vez deberían ser x, y, z y t, donde la última representa al *tiempo* durante el cual estoy (estaba o estaré) allí. Las cuatro coordenadas juntas definen un punto **espacio-temporal** o **evento**. Cuando hablamos sobre cómo suceden o cambian las cosas, necesitamos las cuatro coordenadas. Esto es especialmente importante en el caso en el que dos personas (normalmente denominados "observadores") presencian el mismo evento. Uno de los observadores dice que ha ocurrido en el punto (x, y, z, t), mientras que el otro lo asigna al punto (x', y', z', t'). Sin embargo, estos números dependen del **marco de referencia** del observador. Así,pues, ¿desde que origen espacial $(x = y = 0)$ se miden las distancias y en qué momento $(t = 0)$ comienza su marcha el reloj? La teoría de la relatividad de Einstein trata de cómo *se relacionan* los números que describen el mismo evento, visto por dos observadores diferentes.

Ya hemos estudiado los cambios de marcos de referencia en el capítulo 6. La Fig. 20(a) nos mostraba cómo la distancia entre dos puntos P y Q se mantenía invariante (no cambiaba) cuando se desplazaba el marco mediante una 'traslación' en la que $x_P \to x'_P = x_P + D$, $x_Q \to x'_Q = x_Q + D$ (y lo mismo para el resto de coordenadas), de manera que la *diferencia* $x_P - x_Q$ permanecía igual. Sin embargo, ahora no vamos a desplazar los puntos, sino *el marco de referencia*, mirando a los mismos puntos desde la perspectiva de distintos observadores. Realizaremos la traslación más simple que puedas imaginarte (ver Fig. 25), en la que el marco es simplemente desplazado a lo largo del eje x. El *mismo punto*, con coordenadas (x, y, z) para el primer observador, tendrá coordenadas (x', y', z') para un observador sobre el marco de referencia desplazado. La relación entre los dos conjuntos de coordenadas será

$$x' = x - D, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Si queremos incluir el tiempo t y suponer que los observadores realizan sus medidas al mismo tiempo, las coordenadas del mismo *evento* en 4 dimensiones estarán relacionadas mediante

$$x' = x - D, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \qquad (7.9)$$

que es una *transformación lineal* muy simple (sólo involucra potencias primeras de las variables x, y, z y t, y una 'constante' D).

No obstante, cuando se incluye el tiempo, debemos pensar sobre *cambio* y *movimiento*, algo que no hemos hecho hasta ahora. Si el marco de referencia 2 se está moviendo con respecto a 1, de tal manera que avanza una distancia v hacia la derecha cada segundo (v no cambia con el tiempo), tras t segundos se habrá desplazado una distancia $D = vt$. La constante v se denomina **celeridad** del movimiento. Generalizando, como en la Fig. 20(a), D y v serían *vectores* dependientes de una *dirección*; v sería el 'vector velocidad'. En el caso que estamos tratando, la celeridad a lo largo de la dirección x, v, es justamente la componente x de la velocidad —y, por tanto, no sucede nada si empleamos la palabra "velocidad" para referirnos a la celeridad.

Después de un tiempo t, (7.1) pasaría a ser

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \qquad (7.10)$$

que se denomina "transformación de Galileo" y data de los tiempos de Galileo (1564–1642), quien realizó algunos de los primeros experimentos sobre movimiento. Esta transformación relaciona las coordenadas de cualquier evento dado, medido por un observador en el marco de referencia 2, a aquéllas realizadas por otro observador en el sistema de referencia 1 —cuando el sistema 2 se mueve con velocidad constante v en relación a 1, como en la Fig. 25. La ciencia de la **cinemática** (de la palabra griega 'kinesis', que significa movimiento) se ocupa de la longitud, el tiempo y el movimiento. Así, a partir de ahora empezaremos a pensar en términos cinemáticos. Dentro de este campo, las únicas 'herramientas' que necesitamos para realizar experimentos son una regla de medir y un reloj. De hecho, a menudo no necesitamos siquiera *realizar* los experimentos; es suficiente *pensar* sobre ellos, es decir, realizar **experimentos mentales**. Simplemente pensando sobre las cosas vamos a realizar algunos descubrimientos fascinantes.

Antes de nada, supongamos que nuestros relojes y reglas de medir son *perfectos*. Esto significa que si dos longitudes son iguales, entonces se mantendrán iguales en cualquier instante (éste es el motivo por el decimos "perfecto", ya que una regla real puede doblarse o romperse). Igualmente, cuando dos relojes perfectos muestran tiempos iguales estando en el origen de un sistema de referencia, también lo harán si se encuentran en otro sistema de referencia diferente. Esto es lo único que necesitamos siempre que hablemos en términos cinemáticos (es decir, cuando no tenemos en cuenta objetos reales, los cuales poseen *masa* y están afectados por la 'gravedad', que veremos en el libro 4).

Supongamos que estamos en un tren, esperando en una estación a que unos pasajeros entren y otros se bajen, y que otro tren pasa. Cada tren es un sistema de referencia, como los de la Fig. 25. Desde la ventana vemos a la gente del otro tren que hace las cosas habituales (leer el periódico, caminar a lo largo del vagón, beber té, etc.). Tal vez, por un momento, uno puede preguntarse: ¿qué tren está moviéndose? El otro tren se mueve con una velocidad v *relativa* al nuestro, pero todo permanece como si no se estuviese moviendo. De hecho, *todo movimiento es relativo*. Nuestro tren puede no estar moviéndose en relación a la estación —aunque sí que lo está haciendo (junto con la estación entera, la ciudad o la propia Tierra) en relación al sol y las estrellas. Únicamente *sentimos* el movimiento relativo cuando éste *cambia*. Si el tren para de forma repentina, seguro que lo sentiremos (si estamos de pie lo más seguro es que nos caigamos). Por otra parte, la gente que va en el otro tren no notará que se están moviendo a una velocidad v en relación a nosotros a menos que v *cambie*. Si les vemos caer o verter su té, sabremos que el maquinista ha frenado y el tren está parando. Por tanto, hay algo importante relacionado con la velocidad relativa cuando ésta es *constante*: observadores de dos sistemas de referencia, que se mueven con una velocidad relativa constante, ven que las cosas suceden exactamente de la misma forma. Albert Einstein (1879-1955) fue el primero que se dio cuenta de la *gran importancia* de este hecho (para la Física, en general), llevándolo a la categoría de axioma con el siguiente enunciado:

> Las leyes de la física son exactamente las mismas en dos sistemas de referencia en movimiento relativo uniforme (lo que significa moverse en relación al otro a una velocidad constante sobre una línea recta).

Denominaremos este enunciado *principio de la relatividad especial de Einstein* —"especial" en el sentido de que los objetos con una *masa* y sujetos a la acción de la *gravedad* (la fuerza que hace que las cosas se caigan al suelo) no se incluyen dentro de esta teoría. Las ideas de *relatividad gene-*

ral, que tiene en cuenta la masa y la gravedad, son mucho más complicadas para ser tratadas en este libro, aunque las mencionaremos brevemente en la próxima sección. En la *teoría de la relatividad*, los sistemas de referencia "en movimiento relativo uniforme" se denominan generalmente **sistemas de referencia inerciales** (veremos más sobre esto en el libro 4, donde comenzaremos a hablar sobre la masa).

Volvamos ahora a la ecuación (7.10), que relaciona las coordenadas de un *evento* medido por observadores que se encuentran en los sistemas de referencia de la Fig. 25. El observador en el sistema 1 anota valores (x, y, z, t), mientras que el observador en el sistema 2 anota (x', y', z', t') en relación a sus ejes. Ambos observadores han utilizado la misma unidad estándar de longitud y también ambos han puestos sus relojes estándar inicialmente en marcando $t = t' = 0$, que es el instante en el que suponemos que el sistema 2 está exactamente sobre el sistema 1. La distancia espacial al evento, s, es la misma para ambos observadores:

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

y ambos piensan que $t = t'$, ya que sus relojes concuerdan inicialmente (cuando O' estaba pasando sobre O). Lo que conduce a las 'ecuaciones de transformación' (7.10) al pasar de un sistema de referencia al otro es precisamente la invariancia de estas magnitudes. Estas ecuaciones de transformación se expresan ahora como

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Sin embargo, esta transformación es bastante especial, porque mantiene s^2 y t iguales para ambos observadores e invariantes de forma *separada* (s^2 en un espacio 3-dimensional y t en un espacio 1-dimensional), aunque habíamos acordado que el tiempo debía ser tratado como una coordenada más. ¿Hay alguna transformación más general que permita mezclarse a las coordenadas espaciales y temporales? Si se da este caso, estaremos hablando de espacios 4-dimensionales.

Para ver que tal transformación *puede* realizarse, consideremos un evento sencillo. Disparamos una pistola, situada en el origen, a un tiempo $t = t' = 0$

para el que O' está exactamente sobre O. El ruido viaja en todas direcciones desde la pistola con una velocidad constante que podemos denominar c. Después de un tiempo t, el sonido habrá alcanzado todos los puntos situados a una distancia $r = ct$ del origen O, los cuales caen sobre una superficie de radio $r = ct$ (una esfera) tal que

$$r^2 = c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Si pudiésemos asumir que un observador en el sistema de referencia 2, junto con amigos suyos (todos con relojes estándar) situados allí donde alcanza el sonido, observasen las mismas llegadas de la esfera de ruido, estaríamos suponiendo entonces que

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \tag{7.12}$$

es otro invariante. A este invariante lo denominamos **intervalo** al cuadrado (no 'distancia'), que depende de las cuatro coordenadas. Observemos que (7.12) define una métrica en un espacio de 4 dimensiones, lo cual resulta un poco extraño, ya que viene dada por una matriz como (7.4), pero con tres elementos de la diagonal principal con el mismo signo y el cuarto con signo opuesto (es decir, tres son -1 y el cuarto es $+1$). Sin embargo, después de todo, el tiempo (al cual hemos asignado una 'coordenada temporal' ct) y el espacio (con coordenadas x, y y z) *son* diferentes —lo que aparece a través de la diferencia en los respectivos signos.

Un 'experimento mental' como éste sería difícil de realizar y no sabemos si tiene alguna relación con el mundo real. Sin embargo, sugiere algo que podemos intentar.

Supongamos, así, que en el espacio de 4 dimensiones de Einstein las coordenadas espaciales y el temporales que caracterizan eventos observados desde sistemas de referencia en movimiento relativo uniforme (Fig. 25) están relacionadas de tal manera que (7.12) se satisface. La gran pregunta ahora es: *¿Cuál es esta relación*? Para responderla, podemos argumentar de la siguiente manera.

El nuevo invariante contiene una constante nueva (c), que es también una velocidad como la v en (7.11). Así, v/c debe ser también un número puro que tiende a cero si la constante c es lo suficientemente grande o si v es los suficientemente pequeña. Definamos ahora un número, denominado normalmente γ_v (la 'gamma' griega con un subíndice que muestra su dependencia con la velocidad relativa v),

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}. \tag{7.13}$$

Observar que hemos utilizado los *cuadrados* de las velocidades en el denominador, ya que un cambio en la dirección del eje x cambiará el signo de la velocidad —sin embargo, suponemos que un cambio en la dirección a lo largo del eje x no debe influir en el resultado final. Además, cuando v es pequeña, el denominador de (7.13) tiende a 1 (y, por tanto, también γ_v). Así, con la dependencia de las nuevas ecuaciones de transformación de γ_v, cuando los dos sistemas de referencia a penas se desplazan uno con respecto al otro, tales ecuaciones se aproximarán a las de la transformación de Galileo (tal como cabría esperar).

En vez de las tres primeras ecuaciones en (7.11), intentemos ahora

$$x' = \gamma_v(x - vt), \qquad y' = y, \qquad z' = z.$$

Además, en vez de asumir que el tiempo es universal, igual para ambos observadores, vamos a considerar algo similar a la ecuación anterior. Si escribimos

$$t' = \gamma_v(t - ? \times x),$$

donde '?' representa algo que no conocemos aún, podemos sustituir los valores de x', y', z' y t' (dados en las últimas cuatro ecuaciones) por el lado derecho de (7.12). Comparando ambos lados obtendremos lo que tenemos que elegir para '?'. Los únicos términos que contienen sólo a t (no a t^2) son $c^2\gamma_v^2 \times (-2xt \times ?)$ y $2\gamma_v^2 xvt$. Como no hay nada que compense estos términos en el lado izquierdo de (7.12), la igualdad nos indica que su suma debe ser cero, lo cual fija el valor de '?'. Para obtener cero, debemos elegir, así, $? = v/c^2$, de manera que hemos de tomar

$$t' = \gamma_v \left(t - \frac{v}{c^2} x \right).$$

Lo que hemos demostrado es que la supuesta invariancia de la 'métrica' $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ *requiere que* las ecuaciones de la transformación de Galileo cambien, convirtiéndose en

$$\begin{aligned} x' &= \gamma_v(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma_v \left(t - \frac{v}{c^2} x \right). \end{aligned} \tag{7.14}$$

Éstas son las ecuaciones de las **transformaciones de Lorentz**, derivadas por primera vez por el físico y matemático holandés Lorentz (1857–1928), quien nunca se imaginó cómo iban a cambiar el mundo. Ésta fue la labor de Einstein, quien las re-descubrió y las convirtió en el cimiento de su teoría de la relatividad.

Hoy en día oímos hablar de masa y energía (¿quién no ha visto alguna vez la famosa ecuación de Einstein $E = mc^2$?), energía atómica, bombas atómicas, viajes en el tiempo y otras cosas extrañas que suceden en el Universo. Sin embargo, parémonos por un minuto; ni siquiera hemos ido tan lejos como la física, lo cual dejaremos para otros libros (el comienzo del libro 4). Esta sección es simplemente un comienzo en el que estamos empezando a utilizar algunas de las cosas que ya hemos aprendido sobre los números y el espacio. Antes de esto, ni siquiera incluíamos el *tiempo*, e incluso ni siquiera hemos pensado aún sobre el concepto de *masa*. Por tanto, es realmente sorprendente que hayamos llegado tan lejos únicamente reflexionando sobre las cosas. Antes de parar, haremos una breve conexión con lo que denominamos la 'realidad' (unas pocas preguntas y otras pocas conclusiones).

La primera pregunta es: ¿Cuál es el significado de la constante c?, y la segunda: ¿Cuán grande es? —y, ¿se corresponde con algo que podamos medir? De hecho, *hay* algo que viaja a través del espacio vacío a la velocidad c: la *luz*, que, como sabemos todos, va extremadamente rápida —si enciendes una luz parece que llena toda la habitación de forma instantánea. La física nos dice lo que es la luz y nos da formas de determinar lo rápido que viaja. Si el encendido de la luz comienza en un origen, ésta alcanzará un punto con coordenadas (espaciales) x, y y z tras un tiempo t dado por $t = \text{(distance/velocity)} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}/c$, donde c puede calcularse en términos de magnitudes que podemos medir en el laboratorio. Su valor es exactamente 300 millones de metros por segundo (3×10^8m s^{-1}), es decir, en nuestra vida diaria no necesitamos preocuparnos si utilizamos las ecuaciones galileanas (7.10). La otra gran pregunta es: ¿Cómo hemos podido llegar tan lejos sin saber nada de física? La respuesta no es nada sencilla, aunque *grosso modo* ello se debe a que hemos dejado de lado conceptos como *masa* y *gravedad*, *cargas eléctricas* o la mayoría de las cosas sobre las que trata la física —pensando únicamente en términos cinemáticos (longitud, tiempo y movimiento)—, excepto cuando hemos supuesto que todas las 'leyes' de la física son las mismas para "dos observadores que se encuentren en movimiento relativo uniforme". No hemos necesitados ningún detalle; las transformaciones de Lorentz se derivan, como vimos, de principios *cinemáticos*. Somos verdaderamente afortunados de que la física sea capaz de suministrarnos un método 'natural' de obtención del *valor* de la constante c.

Pero, ¿qué sucede con las conclusiones? La primera es que hay un límite natural para la velocidad con la que cualquier cosa puede moverse, incluso un observador en una nave espacial. Este límite es $v = c$. En tal caso, γ_v en (7.13) tiende a infinito —y para $v > c$, se haría imaginaria. Todas las magnitudes que medimos y relacionamos deben ser *reales* y finitas, de manera que sólo podemos considerar velocidades que sean menores que c.

Hay muchas más conclusiones realmente sorprendentes. Sólo mencionaremos dos: Si un observador en el sistema de referencia 1 mira un objeto en el sistema de referencia 2, se sorprenderá de ver (1) que aquél encoge en la dirección del movimiento y (2) que un reloj en el segundo sistema de referencia se ralentiza.

La contracción de Lorentz

Supongamos que tenemos una regla de medir de longitud l_0 a lo largo del eje x y que no se mueve en relación al sistema de referencia 2; denominamos sus extremos A y B. En el sistema de referencia 1, se estará moviendo *en relación a nosotros* con una velocidad v. Sin embargo, para un observador sobre el sistema de referencia 2, la regla estará en reposo y tendrá una **longitud propia** —también denominada **longitud en reposo**—,

$$l_0 = x'_B - x'_A, \tag{7.15}$$

que no depende del tiempo que marca el reloj.

Si observamos la regla desde *nuestro* sistema de referencia (el sistema 1), su longitud en un instante t medido por nuestro reloj será

$$l = x_B(t) - x_A(t). \tag{7.16}$$

Sin embargo, sabemos por (7.14) cómo se relacionan las coordenadas medidas en cada uno de los sistemas de referencia:

$$x'_A = \gamma_v(x_A - vt), \qquad x'_B = \gamma_v(x_B - vt).$$

Utilizando (7.15), se obtiene que

$$l_0 = x'_B - x'_A = \gamma_v(x_B - x_A) = \gamma_v l,$$

donde l, dada por (7.16), es la longitud de la regla *respecto a nosotros*. Así,

$$l = l_0/\gamma_v. \tag{7.17}$$

En otras palabras, la longitud de la regla medida cuando está alejándose de nosotros con una velocidad v será *menor* que su *longitud en reposo* (medida en el sistema de referencia donde no está en movimiento). Este efecto se denomina *contracción de Lorentz*. Para velocidades que son pequeñas en comparación con c ($\approx$ 300 mil kilómetros por segundo), este efecto es muy pequeño y, por lo tanto, en la vida cotidiana no lo apreciamos. Sin embargo, en física es muy importante; medidas precisas realizadas están en perfecto acuerdo con esta predicción.

Dilatación del tiempo

Otra conclusión a destacar también se deriva igual de fácilmente. Un reloj que se aleje de nosotros registrará intervalos de tiempo diferentes de aquellos que muestra un reloj en reposo en nuestro sistema de referencia. Los tiempos se hacen cada vez más largos, un efecto que se denomina *dilatación del tiempo*. Como ya dijimos, mediamos los tiempos t y t' a partir del momento en el que el reloj sobre el origen del sistema de referencia 2 pasaba justamente sobre el 1. Entonces establecíamos que $t' = t = 0$. Sin embargo, en relación al sistema de referencia 2, su posición a un tiempo t posterior será $x = vt$. De acuerdo con la última ecuación de (7.14), los tiempos que caracterizan a un mismo evento (observado por dos observadores distintos) debe estar relacionado de la siguiente forma:

$$t' = \gamma_v \left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = \gamma_v t \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma_v t/\gamma_v^2 = t/\gamma_v,$$

donde hemos introducido $x = vt$ (para el reloj que está en movimiento) y hemos utilizado la definición de γ_v dada en (7.13). Así,

$$t = \gamma_v t'. \tag{7.18}$$

En otros términos, todos los tiempos que se miden en el sistema de referencia que se está moviendo (2) tienen que multiplicarse por γ_v si queremos obtener los tiempos medidos con nuestro reloj en el sistema de referencia 1. Ahora, el tiempo necesario para que algo suceda —el tiempo entre dos eventos A y B en una posición espacial dada— será $T_0 = t'_B - t'_A$ para un observador que se mueva con su reloj (sistema de referencia 2). Este observador denominará al tiempo que mide su "tiempo propio", lo que conduce a algunos efectos muy extraños. Por ejemplo, si el sistema de referencia 2 regresa al origen O de la fig. 25 después de viajar alrededor del mundo, el observador del sistema de referencia 1 (que permaneció en casa con su reloj) notará que el viaje transcurrió en un tiempo $T = \gamma_v T_0$, *mayor* que el tiempo T_0 medido por el viajero. ¿Quién está en lo cierto? Ambos. Cada uno tiene su 'tiempo propio' y no debería sorprendernos que estos tiempos no concuerden. Normalmente las diferencias son muy pequeñas para que puedan ser apreciables. Sin embargo, se han utilizado relojes extremadamente precisos (como los relojes 'atómicos'), llevándolos alrededor del mundo en vuelos comerciales corrientes, y se *ha* visto que están bastante de acuerdo con la fórmula. Experimentos más precisos también se han realizado y han confirmado (7.18).

7.3. Los espacios curvos y la relatividad general

En la sección 1.1 dijimos que "el espacio está muy ligeramente 'curvado', especialmente cerca de objetos muy pesados, como el sol y las estrellas, por lo que las ideas de Euclides no son siempre correctas ..." Una de las ideas más brillantes de Einstein, que éste desarrolló durante los años 1905-1915, fue la de que la masa de objetos pesados producía una 'curvatura' local en el espacio que los rodea. Esto le condujo de la teoría de la relatividad especial a la de la relatividad general, en la que se incluyen la masa y sus efectos. Como no hemos ninguna física hasta ahora, no podemos siquiera hablar sobre la relatividad general. Sin embargo, *estamos* listos para abordar 'espacios curvos' y lo que esto significa.

En relatividad especial, la métrica 4-dimensional (tres coordenadas espaciales y una temporal) era muy similar a la euclídea ordinaria en el espacio 3-dimensional (ver sección 5.2); el cuadrado del intervalo ('distancia') entre dos eventos ('puntos' del espacio-tiempo) aún mantenía la forma de 'suma de cuadrados', independientemente de los signos $\pm$ asociados a los cuatro términos. Además, presentaba la misma forma independientemente de lo grande que fuese el intervalo. Un espacio como éste se denomina 'pseudo-euclídeo'.

En relatividad general, la métrica no es tan sencilla. Además, ya no es la misma para todos los puntos del espacio, pues puede depender del lugar en el que nos encontremos. Para tener una idea de lo que significa esto utilizaremos el ejemplo de la sección 1.1. La superficie de la Tierra es un espacio curvo a pesar de que sólo es un espacio 2-dimensional y es un poco especial porque su curvatura es la misma en todos los puntos (sólo depende de su radio). Sin lugar a dudas, las matemáticas de las superficies curvas son importantes para la elaboración de mapas. Además, en el mundo antiguo eran importantes porque los astrónomos de la época creían que el sol y la luna se movían alrededor de la Tierra sobre una superficie esférica. Los indúes y los árabes inventaron muchas reglas aritméticas para realizar cálculos sobre sus posiciones, sin embargo estas reglas no se convirtieron en fórmulas algebraicas hasta el siglo XIII aproximadamente. La teoría que vino a continuación nos dice cómo calcular longitudes y ángulos para líneas que son 'tan rectas como podamos trazarlas' sobre una superficie esférica. Tales líneas siguen el camino más corto entre dos puntos A y B *sobre la superficie*. Estas líneas se denominan **geodésicas**, de las palabras griegas para 'Tierra' y 'medida'. Si un barco navega desde le punto A sobre la superficie de la Tierra a otro B, siempre manteniendo la misma dirección, y después se dirige a un tercer punto C (desde B), el camino de tres lados ABC se denomina **triángulo esférico**. La geometría de tales caminos la han estudiado los marineros durante cientos de años y conducido a la rama de las matemáticas que se denomina *trigonometría esférica*.

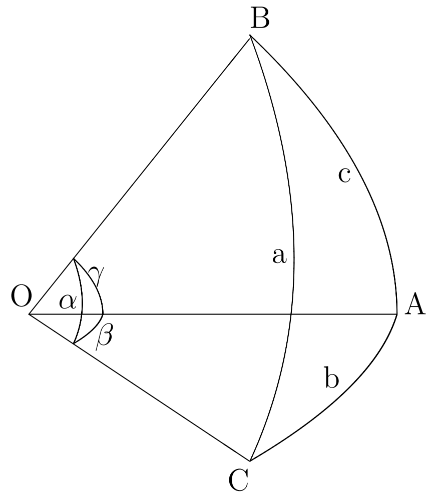


Figura 26

Lo que queremos obtener ahora es la forma de la métrica que determina la distancia entre dos puntos en un espacio curvo 2-dimensional —los puntos sobre una superficie esférica 'embebida' en el mundo 3-dimensional en el que vivimos. Si podemos hacerlo en este caso, tendremos una idea sobre cómo hacerlo para un espacio curvo 3-dimensional embebido en un espacio 4-dimensional (o, incluso, para un espacio curvo 4-dimensional embebido en un espacio 5-dimensional). Es importante notar el hecho de que si queremos 'doblar' un espacio, siempre necesitaremos (al menos) una dimensión extra para describir este plegamiento —no podemos describir la superficie de una esfera, que es 2-dimensional, sin una tercera dimensión para describir la propia esfera.

Antes de nada, necesitamos generalizar la 'ley del seno' y la 'ley del coseno', que, como vimos en la sección 5.5, se aplican a un triángulo con vertices A, B y C sobre una superficie plana. Lo que queremos son resultados similares para una superficie esférica como la mostrada en la Fig. 26. Supongamos, así, que A, B y C son los vectores posición de los puntos A, B y C en relación con el centro de la esfera (la Tierra), donde utilizamos A, B y C para denotar los *ángulos* (sobre la superficie) en los bordes del triángulo. Utilizaremos una notación similar para los lados; a será el lado opuesto al ángulo A, y así sucesivamente.

La ley del seno es prácticamente igual que la correspondiente a la superficie plana,

$$\frac{\sin A}{\alpha} = \frac{\sin B}{\beta} = \frac{\sin C}{\gamma}, \tag{7.19}$$

aunque los denominadores son *ángulos*, no longitudes de lados. Recuerda, sin embargo, que los ángulos α, β y γ están en el centro de la esfera (Fig. 26), y no en los vértices de un triángulo. Al mismo tiempo, $\alpha = a/R$, donde a es una longitud de *arco*. Así, podemos reemplazar los ángulos en (7.19) por las longitudes de los lados (siempre que recordemos que los lados están doblados). Por tanto, la fórmula es exactamente igual que la correspondiente a una superficie plana.

La ley del coseno es la que realmente necesitamos. Se deriva de lo que ya sabemos sobre el producto triple (ver sección 6.4). El ángulo A es aquél comprendido entre los planos AOB y AOC, que es equivalente al ángulo entre las *normales*. Un vector normal a AOB es $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$, mientras que $\mathsf{A} \times \mathsf{C}$ será normal a AOC. El ángulo A puede así determinarse a partir del producto escalar de las dos normales, lo cual nos da $\cos A$. Por tanto, echemos un vistazo al producto escalar $(\mathsf{A} \times \mathsf{B}) \cdot (\mathsf{A} \times \mathsf{C})$, donde observamos que elegir $R = 1$ para el radio no afecta a los ángulos. El producto escalar puede reducirse utilizando el resultado (ver los ejercicios del capítulo 6):

$$(\mathsf{A} \times \mathsf{B}) \cdot (\mathsf{A} \times \mathsf{C}) = (\mathsf{A} \cdot \mathsf{A})(\mathsf{B} \cdot \mathsf{C}) - (\mathsf{A} \cdot \mathsf{C})(\mathsf{A} \cdot \mathsf{B}).$$

Para una esfera de radio unidad,

$$\mathsf{B} \cdot \mathsf{C} = \cos\alpha, \qquad \mathsf{C} \cdot \mathsf{A} = \cos\beta, \qquad \mathsf{A} \cdot \mathsf{B} = \cos\gamma.$$

Además, $\mathsf{A} \cdot \mathsf{B}$ es un vector de longitud $\sin\gamma$, normal al plano AOB y apuntando hacia dentro (es decir, sobre el lado C). Por otra parte, $\mathsf{A} \cdot \mathsf{C}$ tiene una longitud $\sin\beta$ y es normal al plano AOC, pero apuntando hacia afuera. Introduciendo estos valores en la expresión anterior, encontramos

$$(\mathsf{A} \times \mathsf{B}) \cdot (\mathsf{A} \times \mathsf{C}) = \sin\beta \sin\gamma \cos A = \cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma.$$

Hay dos relaciones más que poseen una forma similar, y que se obtienen comenzando a partir de los ángulos B y C (en vez de A), respectivamente.

Todas estas relaciones forman parte de la ley del coseno para un triángulo esférico:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A, \\ \cos\beta &= \cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos B, \\ \cos\gamma &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C. \end{aligned} \tag{7.20}$$

Los ángulos α, β y γ (medidos en radianes) están relacionado con las longitudes de arco BC, CA y AB sobre la superficie esférica, respectivamente. Por ejemplo, si ponemos $BC = a$, el ángulo α viene dado por $\alpha = a/R$, donde R es el radio de la esfera.

Ahora, supongamos que A denota un 'origen de coordenadas' sobre la superficie y tomemos los arcos que van hacia afuera, AB y AC, en el lugar de los ejes, eligiendo un ángulo $A = \pi/2$ entre ellos. Escribiendo $\cos A = 0$, la primera línea de (7.20) nos dice que

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma, \tag{7.21}$$

que es todo lo que necesitamos. Para puntos cercanos a A podemos utilizar los primero términos de la serie de coseno (ver capítulo 4), escribiendo así la última ecuación como

$$1-\frac{a^2}{2R^2}+\frac{a^4}{24R^4}-\cdots = \left(1-\frac{b^2}{2R^2}+\frac{b^4}{24R^4}-\cdots\right)\left(1-\frac{c^2}{2R^2}+\frac{c^4}{24R^4}-\cdots\right).$$

Si multiplicamos todo por $2R^2$ y comparamos los términos de segundo orden a ambos lados del signo =, a primer orden de aproximación el resultado es:

$$a^2 \approx b^2 + c^2, \tag{7.22}$$

La longitud al cuadrado del arco BC tiene forma euclídea (es una suma de cuadrados de distancias a lo largo de los otros dos arcos, como en el caso de una superficie *plana*, de acuerdo con el axioma de la métrica de la sección 1.2). Sin embargo, la métrica solamente es euclídea *localmente*; hay 'términos de correctivos',

$$-(1/12R^2)a^2, \qquad \text{y} \qquad -(1/12R^2)(b^4+c^4) - b^2c^2/R^2,$$

que deben sumarse a la izquierda y a la derecha de la ecuación (7.22), respectivamente.

Obviamente, cuando el *radio* de curvatura R es infinitamente grande, el espacio 2-dimensional se hace plano (de curvatura cero). Sin embargo, en relatividad general incluso una curvatura muy pequeña en el espacio-tiempo

4-dimensional es suficiente para explicar muchas propiedades del Universo. Sin la física, con la que comenzaremos el libro 4, no es posible ir más lejos. Pero sin el genio de Einstein y otro como él nunca hubiese sido posible llegar tan lejos.

Ejercicios

(1) Cuando consideramos el vector (7.5) para representar el 'estado' de una clase (cuán grandes son los estudiantes en esta clase), estamos empleando el conjunto de vectores $\{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \ldots, \mathsf{e}\}$ como 'base'. Las componentes que utilizábamos,

$$(4/40),\ (8/40),\ (13/40),\ (12/40),\ (3/40),$$

que son los números fraccionarios que representan al número de estudiantes en cada uno de los rangos de altura, no daban un vector *unitario* (la suma de sus cuadrados no da 1).

Demostrar que utilizando las *raíces cuadradas* de los números como componentes siempre se obtiene un vector unitario. De este modo, *es* posible representar el estado de la clase mediante un vector unitario que apunta (desde el origen) en una dirección de un espacio 5-dimensional, la cual muestra el número fraccionario de estudiantes en cada una de las cinco categorías.

(2) Supongamos que queremos comparar dos clases para ver si las alturas de los estudiantes siguen el mismo patrón. Prepara vectores s_1 y s_2 como los del ejercicio 1, pero para dos clases diferentes (por ejemplo, para 20 chicas de 15 años y 18 chicos de 14 años). ¿Es similar el patrón de alturas?

(Puedes medir las alturas o tratar de averiguarlas. Los patrones serán similares si los vectores apuntan de forma aproximada en la misma dirección. Si es así, su producto escalar $\mathsf{s}_1 \cdot \mathsf{s}_2$ tendrá un valor cercano a 1. Para cada dos clases diferentes (por ejemplo, una de 5 años de edad y la otra de 16) el producto escalar de los vectores será mucho más cercano a cero.)

Una mirada hacia atrás

Comenzaste este libro sabiendo únicamente algo sobre números y sobre cómo trabajar con ellos empleando métodos algebraicos. Ahora ya sabes cómo medir *magnitudes* en el espacio (distancias, áreas y volúmenes), cada una caracterizada por un cierto número de **unidades**. Además, has visto que estas ideas te ofrecen un nuevo punto de partida para comprender geometría, diferente del utilizado por Euclides y que te lleva directamente a la concepción moderna de la geometría. De nuevo, has pasado por muchos hitos a lo largo del camino:

- Euclides comenzó a partir de un conjunto de **axiomas** (siendo el más importante aquél que dice que dos líneas rectas paralelas nunca se encuentra) que utilizó para construir toda la geometría. En el capítulo 1 comenzaste a partir de varios axiomas (el **axioma de distancia** y el **axioma de métrica**) que se desprenden del *experimento*.

- Dos líneas rectas con un punto en común definen un **plano**. El axioma de métrica nos ofreció una manera de verificar si dos líneas son **perpendiculares**. Además, fuimos capaces de definir dos líneas rectas **paralelas** a partir de una nueva forma de entender los axiomas de Euclides. Utilizando conjunto de líneas rectas perpendiculares y paralelas determinamos números, las coordenadas (x, y), que definen cualquier punto sobre un plano. Cualquier línea sobre un plano podía describirse, así, mediante una **ecuación** sencilla. Y lo mismo sucedía con un círculo.

- En el capítulo 3 aprendimos cómo calcular el **área** de un triángulo y de un círculo, y también a evaluar el número π ('pi') mediante el método de Arquímedes. Además, estudiamos los ángulos y encontramos algunos de los resultados clave sobre los ángulos entre líneas rectas que se cruzan.

- En el capítulo 4 se recordaron algunas de las cosas que habíamos aprendido en el libro 1, que necesitábamos para el estudio de las **rotaciones**. Aprendimos cosas sobre la **función exponencial**, e^x, definida en términos de una serie, y sus propiedades. A partir de ésta, encontramos una conexión con los ángulos y las funciones 'trigonométricas'.

- Al hablar de los espacios tridimensionales, la primera cosa que hicimos fue definir unos **ejes** y decidir cómo etiquetar cada punto mediante *tres* **coordenadas**. Tras esto, todo se parecía bastante a lo que ya habíamos hecho en el espacio bidimensional. Sin embargo, no es sencillo *representar* cosas en un espacio de 3 dimensiones, por lo que es mejor recurrir al **álgebra vectorial**. Para cualquier par de vectores, encontramos dos nuevos tipos de 'producto', el **producto escalar** (un número) y el **producto vectorial** (un nuevo vector), que dependen de las longitudes de los vectores y el ángulo entre ellos. Los ejemplos y los ejercicios vistos nos mostraban la utilidad que podían tener estos productos en la geometría en 3 dimensiones.

- El capítulo 6 fue bastante difícil, aunque las ideas subyacentes podían entenderse de una forma bastante sencilla: longitudes, áreas y volúmenes permanecen *invariantes*. Aunque este hecho fue utilizado a menudo por Euclides (normalmente en el espacio bidimensional) para demostrar teoremas sobre áreas, hacia el final del capítulo ya teníamos todas las 'herramientas' necesarias para trabajar de una manera mucho más general, como se hace hoy día.

- Al final del libro, en el capítulo 7, echamos un vistazo a la siguiente gran generalización: los espacios de n dimensiones, donde n es *cualquier* entero. Obviamente, no podemos imaginárnoslos, pero el *álgebra* empleada es la misma para cualquier valor n. De este modo, fuimos capaces de inventar espacios nuevos dependiendo del uso que queríamos darles. Uno de estos espacios fue inventado por Einstein hace 100 años para añadir el *tiempo* en la descripción del espacio (contando t como una cuarta coordenada similar a x, y y z. Además, nos pudimos hacer una pequeña idea de los hechos tan sorprendentes que se derivan de este nuevo espacio, hechos que fueron verificados mediante experimentos, comprobándose que eran ciertos.

Antes de que cierres este libro, párate a reflexionar por un minuto sobre lo que has aprendido. Tal vez comenzases a estudiar ciencia con el libro 1 (¿hace dos, tres, cuatro años?) y ahora ya estás al final del libro 2. Comenzaste a partir de prácticamente nada. Sin embargo, tras trabajar a lo largo de unas 150 páginas, puedes comprender cosas que el ser humano tardó miles de años en descubrir. Se trata de algunas de las grandes creaciones de la mente humana, de la *mente científica***.**

Índice